PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 13 — 1. Juli 1939 — Redaktionsschluß für Nr. 15 am 15. Juli 1939 — 40. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

Y. Björnståhl, Über die Bracesche Halbschattenmethode. S. 437.

Berichte:

O. Mathias, Die ballistische Lichttheorie und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. I. S. 443.

Besprechungen:

L. de Broglie, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. S. 460.

Nachrichten. S. 460.

ABHANDLUNGEN

Über die Bracesche Halbschattenmethode

Von Yngve Björnståhl

In neuerer Zeit sind eine Anzahl Kompensatorkonstruktionen für Doppelbrechungsmessungen bekannt geworden. Dazu gehört die Anordnung von Mattieu [1], die sich aber nur zur Messung kleiner Phasendifferenzen eignet, ferner die von Szivessy und Dierkesmann [2] vorgeschlagene Methode. Hier kommt bei der Messung selbst lediglich eine Halbschattenplatte zur Verwendung. Da deren Phasendifferenz Δ_h gegenüber der zu messenden Phasendifferenz Δ groß sein muß ($\Delta_h \gg 2\Delta$), so verursacht die Grenzlinie des Halbschattens eine erhebliche Störung. Auch andere Umstände tragen dazu bei, die Idealität der Messung zu beeinträchtigen. Man darf wohl ohne Zögern behaupten, daß die nunmehr fast klassische Methode der Doppelbrechungsmessung, wie sie Brace [3] angegeben hat, noch unübertroffen dasteht; und es ließe sich recht wohl rechtfertigen, wenn ihr eine ausführliche Darstellung im Handbuch der Physik (Szivessy [4]) sowie in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik [5] zuteil würde.

In historischer Hinsicht verweise ich auf Szivessy [4]. Außer von Brace [3] ist die Theorie des Kompensators von Tuckerman [6], Hebecker [7], Chaumont [8], Bergholm [9] und Szivessy [4] behandelt worden.

Die Anordnung besteht bekanntlich aus der über das gesamte Gesichtsfeld reichenden eigentlichen Kompensatorplatte und einer Halbschattenplatte, die nur einen Teil von jenem abdeckt. In der Regel werden die Platten aus Glimmer hergestellt. Den Halbschatten kann man zwischen Kompensatorplatte und Polarisatorprisma (Fall I) oder zwischen Kompensatorplatte und Analysatorprisma (Fall II) anbringen.

Sehen wir von Braces [3] approximativer und Tuckermans allgemein gehaltener Darstellung ab, so ist die Theorie des ersten Falles (I) von Chaumont [8] und Bergholm [9], die des zweiten (II) von Hebecker [7] und Szivessy [4] behandelt worden.

Wir wollen uns hier näher mit dem Fall II befassen, der von Szivessy im Handbuch der Physik, Teil XIX, und in Kohlrauschs Handbuch der praktischen Physik zur Anwendung empfohlen wird. Die Anordnung II ist also: Polarisator, doppelbrechendes Medium, Kompensator, Halbschatten, Analysator.

Hebecker (l. c.), der diese Anordnung verwendet, leitet zunächst einen Ausdruck für Fall I ab und zeigt dann, daß dieser auch für Anordnung II gilt. Indessen muß beachtet werden, daß er bei der Ableitung die Tangente der unbekannten Phasendifferenz durch den Winkel ersetzt und andere Näherungen einführt.

Szivessy (l. c.) geht von der für Fall I abgeleiteten Formel aus und sucht mit Hilfe von Fresnels Satz [10] darzutun, daß derselbe Ausdruck auch für Fall II gelten müsse. Dieser Schluß dürfte auf einem Irrtum bei Anwendung des Fresnelschen Satzes oder auf dessen unerlaubter Verallgemeinerung beruhen. Der Satz betrifft den Fall zweier Kristallplatten zwischen gekreuzten Nicols. Bleiben die Achsenazimute unverändert, so hängt die Intensität des austretenden Lichtes nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die Platten vom Licht getroffen werden. Im hier vorliegenden Falle können wir Kompensatorplatte und Halbschatten als die beiden Kristallplatten ansehen. Ist kein doppelbrechendes Medium vorhanden, so können wir sie ohne weiteres vertauschen. Sobald aber ein doppelbrechendes Medium hinzutritt, wird das austretende Licht elliptisch polarisiert, und wir dürfen den Satz von Fresnel nicht mehr

anwenden. Die für Anordnung I abgeleitete Formel sagt uns nichts über Anordnung II.

Es könnte eine Möglichkeit für die Zulässigkeit von Szivessys Verallgemeinerung des Fresnelschen Satzes auf Gültigkeit bei drei Kristallplatten für die speziell in Braces Anordnung auftretenden Azimute vorhanden sein. Um die Unrichtigkeit dieses Ansatzes zu zeigen, will ich einen Ausdruck für Fall II ableiten.

Wir gehen bei den Berechnungen aus von der von Poincaré [11] angegebenen Betrachtungsweise der Behandlung des Doppelbrechungsproblems und erinnern zunächst an einige allgemeine Sätze.

Eine elliptische Schwingung läßt sich durch die Winkelkoeffizienten der Ellipsenasymptoten charakterisieren. Werden die Winkelkoeffizienten, die die Form $u + vi$ haben, in einer Ebene dargestellt, so ergeben sich aus konformer Abbildung der Punkte in der Ebene auf eine Kugelfläche sehr einfache geometrische Zusammenhänge zwischen den Schwingungskonstanten. Andererseits ist die Darstellung in der Ebene für graphische Lösungen verwendbar.

Wir charakterisieren eine Schwingung

$$x = A \sin \omega t$$

$$y = B \sin (\omega t - \Delta)$$

(Fig. 1) durch das Amplitudenverhältnis

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \gamma$$

der Komponenten und deren Phasendifferenz Δ.

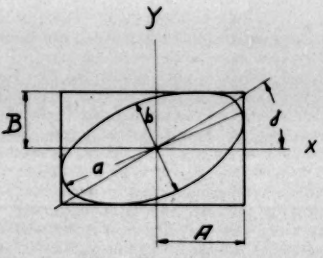

Fig. 1.

Auf der Kugel stellt sich die Schwingung durch den Punkt C dar (Fig. 2). Die den beiden Komponenten x und y entsprechenden Amplituden sind die Sehnen $A = Cy$ und $B = Cx$. Die Phasendifferenz Δ erscheint als Winkel zwischen Ebene xCy und Äquatorialebene.

Eine Drehung des Koordinatensystems in der Ebene um z. B. einen Winkel $(xx)'$ entspricht auf der Kugel einer Winkeldrehung $2(xx)'$ um die Polarachse. Die Phasendifferenz zwischen den neuen Komponenten x' und y' ist nun der

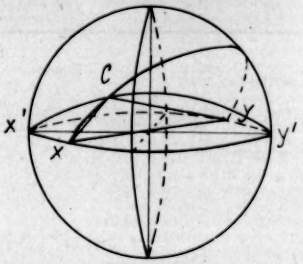

Fig. 2.

Winkel zwischen $x'Cy'$ und der Äquatorialebene. Die Sehnen $y'C$ und $x'C$ entsprechen den Amplituden.

Intensität des Lichtes nach Durchsetzung des Analysatorprismas

Eine Schwingung wird dargestellt durch den Punkt C auf der Kugel (Fig. 3). Das Auslöschungsazimut des Analysators ist A_2. Die Schwingung kann man sich in die Komponenten A_2 und F mit einer Phasendifferenz Δ zerlegt denken. Die Amplitude des durch den Analysator gegangenen Lichtes ist die Sehne CA_2. Der geometrische Ort für Punkte gleicher Beleuchtung bei bestimmtem Analysatorazimut A_2 ist ein Kreis auf der Kugel, den man durch Rotation des Bogens CA_2 um A_2 als Mittelpunkt erhält. Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ein. Ist 2δ der Winkel zwischen Azimut A_2 des Analysatornicols und ξ_0,

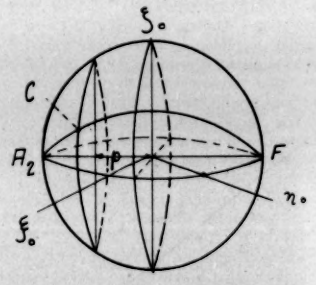

Fig. 3.

so wird die Gleichung der Ebene durch die erwähnte Ortslinie

$$\xi \cos 2\delta + \eta \sin 2\delta - p = 0 ;$$

p ist das Lot vom Kugelzentrum auf die Ebene. Nur solche Werte für ξ und η auf der Kugel zeigen gleiche Helligkeit, die diese Gleichung erfüllen.

Anordnung II

Wir kehren zur Behandlung des Braceschen Kompensators nach Anordnung II zurück, bei welcher der Halbschatten zwischen Kompensator und Analysator liegt, und betrachten eine

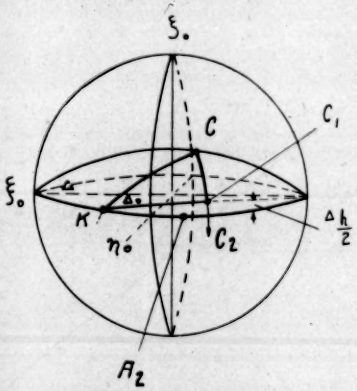

Fig. 4. Anordnung II.

Schwingung aus zwei Komponenten mit der Phasendifferenz Δ und dem Amplitudenverhältnis $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\gamma$. In der sphärischen Darstellung ist C der charakteristische Punkt (Fig. 4). Wir nehmen an, die Schwingung sei nach Durchsetzen eines doppelbrechenden und eventuell auch absorbierenden oder drehenden Mediums entstanden und dessen Achse falle zusammen mit dem Kugelradius ξ_0. Alle Azimute werden von dieser Achsenrichtung aus gezählt. Die Schwingung passiert den Kompensator, der die Phasendifferenz Δ_0 und das Azimut α_0 hat. Das Azimut des Kompensators in der Figur ist $K\xi_0 = 2\alpha_0$. Der Halbschatten hat die Phasendifferenz Δ_h und das Azimut o, d. h. seine Achse fällt mit der des doppeltbrechenden Mediums ξ_0 zusammen. Der Analysator befindet sich in A_2 und hat das Azimut α_2. Unter der Wirkung des Kompensators verschiebt sich C nach C_1 durch Drehung des Bogens KC nach KC_1. Die Wirkung des Halbschattens besteht in Verschiebung von C_1 nach C_2 durch Drehung des Bogens $\xi_0 C_1$. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ so, daß ζ_0 in die Polrichtung fällt. Die Koordinaten des Punktes C sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R_0 \cos 2\gamma \\ \eta &= R_0 \sin 2\gamma \cos \Delta \\ \zeta &= R_0 \sin 2\gamma \sin \Delta , \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo R_0 der Kugelradius ist.

Wir suchen einen Ausdruck für die Koordinaten von C_1 und C_2. Das Koordinatensystem wird um den Winkel $2\alpha_0$ um die ζ_0-Achse gedreht, so daß die neue ξ-Achse durch Punkt K geht. Sind die Koordinaten im neuen System ξ', η' und ζ', so erhalten wir für C

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi \cos 2\alpha_0 + \eta \sin 2\alpha_0 \\ \eta' &= -\xi \sin 2\alpha_0 + \eta \cos 2\alpha_0 \\ \zeta' &= \zeta . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Man läßt den Kompensator wirken: C wird nach C_1 gedreht. Die Koordinaten für C_1 werden

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = \xi' &= R_0 \left\{ \cos 2\alpha_0 \cos 2\gamma + \sin 2\alpha_0 \sin 2\gamma \cos \Delta \right\} \\ \eta_1 = \eta' \cos \Delta_0 - \zeta' \sin \Delta_0 &= R_0 \left\{ \cos \Delta_0 [-\sin 2\alpha_0 \cos 2\gamma + \cos 2\alpha_0 \sin 2\gamma \cos \Delta] - \sin \Delta_0 \sin 2\gamma \sin \Delta \right\} \\ \zeta_1 = \eta' \sin \Delta_0 + \zeta' \cos \Delta_0 &= R_0 \left\{ \sin \Delta_0 [-\sin 2\alpha_0 \cos 2\gamma + \cos 2\alpha_0 \sin 2\gamma \cos \Delta] + \cos \Delta_0 \sin 2\gamma \sin \Delta \right\} . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Drehen wir das Koordinatensystem um einen Winkel $-2\alpha_0$, so daß die neuen Achsen ξ_0, η_0 und ζ_0 sind, so finden wir für C_1

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1 \cos 2\alpha_0 - \eta_1 \sin 2\alpha_0 \\ \eta_1' &= \xi_1 \sin 2\alpha_0 + \eta_1 \cos 2\alpha_0 \\ \zeta_1' &= \zeta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Lassen wir den Halbschatten wirken, so verschiebt sich C_1 nach C_2, und die Koordinaten des letztgenannten Punktes werden

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1' \\ \eta_2 &= \eta_1' \cos \Delta_h - \zeta_1' \sin \Delta_h \\ \zeta_2 &= \cdots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Für gleiche Beleuchtung durch den Analysator müssen die Koordinaten von C_1 und C_2 der Gleichung genügen:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 \cos 2\alpha_2 + \eta_{i1} \sin 2\alpha_2 - p = 0 \\ &p = \xi_1' \cos 2\alpha_2 + \eta_{i1}' \sin 2\alpha_2 \\ &\quad = \xi_2 \cos 2\alpha_2 + \eta_{i2} \sin 2\alpha_2 . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Es ist aber $\xi_1' = \xi_2$.

Die Einstellung auf gleiche Helligkeit ist unabhängig vom Azimut α_2 des Analysators

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{i1}' = \eta_{i2} \\ &\eta_{i1}' = \eta_{i1}' \cos \Delta_h - \zeta_1' \sin \Delta_h \\ &\zeta_1' = \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \eta_{i1}' . \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\sin 2\gamma \sin \Delta \left[\operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \cos 2\alpha_0 \sin \Delta_0 - \cos \Delta_0 \right] \\ &\quad = \sin 2\gamma \cos \Delta \left[\sin \Delta_0 \cos 2\alpha_0 + \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} (\sin^2 2\alpha_0 + \cos^2 2\alpha_0 \cos \Delta_0) \right] \\ &\quad + \cos 2\gamma \sin 2\alpha_0 \left[-\sin \Delta_0 + \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \cos 2\alpha_0 (1 + \cos \Delta_0) \right] . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

In diesem Falle ist die Einstellung des Kompensators auf Gleichheit nicht unabhängig vom Amplitudenverhältnis. Um die Formel anwenden zu können, muß man dieses kennen. Der Polarisator kann nicht gedreht werden, ohne daß sich die Einstellung ändert. Es sei angenommen

$$\left.\begin{aligned} &2\gamma = 90^\circ ; \qquad \operatorname{tg} \gamma = \varrho = 1 \\ &\operatorname{tg} \Delta = \frac{-\sin \Delta_0 \cos 2\alpha_0 - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} [\sin^2 2\alpha_0 + \cos^2 2\alpha_0 \cos \Delta_0]}{\cos \Delta_0 - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \cos 2\alpha_0 \sin \Delta_0} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

oder bei Zählung des Azimutes von einem Punkte mit dem Azimut 45°

$$\left.\begin{aligned} &90 - 2\psi = 2\alpha_0 \\ &\operatorname{tg} \Delta = \frac{-\sin \Delta_0 \sin 2\psi - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} [\cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos \Delta_0]}{\cos \Delta_0 - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \sin \Delta_0 \sin 2\psi} . \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Man kann zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Phasendifferenz des Kompensators ist von mäßiger Größe:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{-\operatorname{tg} \Delta_0 \sin 2\psi - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} [\cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos \Delta_0]}{1 - \operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2} \sin \Delta_0 \sin 2\psi} \quad (11)$$

oder näherungsweise, da Δ_h klein ist:

$$\operatorname{tg} \Delta = -\operatorname{tg} \Delta_0 \sin 2\psi ;$$

machen wir eine Nullpunktbestimmung

$$\left.\begin{aligned} &0 = -\operatorname{tg} \Delta_0 \sin 2\psi' \\ &\operatorname{tg} \Delta = \operatorname{tg} \Delta_0 (\sin 2\psi' - \sin 2\psi) . \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

b) Die Phasendifferenz des Kompensators ist groß, z. B. $\Delta_0 = 90^\circ$. Man erhält

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Delta_h}{2}} + \frac{\cos^2 2\psi}{\sin 2\psi} . \quad (13)$$

Die Anordnung eignet sich nicht zur Messung, da einem mäßig großen Wert von Δ ein sehr kleiner von ψ entspricht. Ein Fehler der Bestimmung von ψ wird einen sehr großen Fehler in Δ verursachen.

Anordnung I

Wir behandeln nun auch den Fall, daß der Halbschatten sich zwischen Kompensator und doppelbrechendem Medium befindet (Fall I). Das Licht passiert den Polarisator, das doppelbrechende, evtl. absorbierende oder drehende Medium, den Halbschatten, den Kompensator und das Analysatorprisma. Wie im vorigen Falle rechnen wir alle Azimute von der Achse ξ_0 des doppelbrechenden Mediums an. Der Analysator

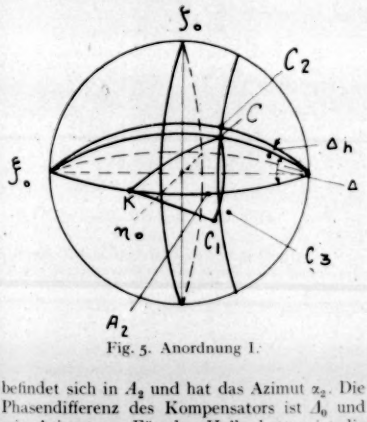

Fig. 5. Anordnung I.

befindet sich in A_2 und hat das Azimut α_2. Die Phasendifferenz des Kompensators ist Δ_0 und sein Azimut α_0. Für den Halbschatten ist die Phasendifferenz Δ_h und das Azimut o, d. h. dieses fällt mit der Achse des Mediums zusammen. Der charakteristische Punkt C stellt eine Phasendifferenz Δ und ein Amplitudenverhältnis $\operatorname{tg}\gamma = \frac{B}{A}$ dar (Fig. 5). Die Wirkung des Halbschattens besteht in der Verschiebung des Punktes C nach C_2. Unter dem Einflusse des Kompensators verschiebt sich C nach C_1 durch eine Drehung des Bogens KC nach KC_1. Für den vom Halbschatten überdeckten Teil des Gesichtsfeldes erfolgt eine Verschiebung C_3 nach C_3.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem ξ_0, η_0, ζ_0 so, daß ξ_0 mit der Achse des Mediums und ζ_0 mit der Polrichtung zusammenfällt. Die Koordinaten des Punktes C sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R_0 \cos 2\gamma \\ \eta &= R_0 \sin 2\gamma \cos\Delta \\ \zeta &= R_0 \sin 2\gamma \sin\Delta\,, \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

wo R_0 der Radius der Kugel ψ ist.

Wir wollen einen Ausdruck für die Koordinaten von C_1 und C_3 suchen. Das Koordinatensystem wird um einen Winkel $2\alpha_0$ um die ζ_0-Achse gedreht, so daß die neue ξ-Achse durch das Kompensatorazimut K geht:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi\cos 2\alpha_0 + \eta \sin 2\alpha_0 \\ \eta' &= -\xi \sin 2\alpha_0 + \eta \cos 2\alpha_0 \\ \zeta' &= \zeta\,. \end{aligned}\right| \qquad (15)$$

Der Kompensator wirkt ein: C wird nach C_1 gedreht. Die Koordinaten von C_1 sind :

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1' \\ \eta_1 &= \eta_1' \cos\Delta_0 - \zeta' \sin\Delta_0 \\ \zeta_1 &= \eta_1' \sin\Delta_0 + \zeta' \cos\Delta_0\,. \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Die Koordinaten für C_2 ergeben sich aus Gleichung (15) durch Einsetzen von $\Delta + \Delta_h$ statt Δ.

Analog zum Vorstehenden erhalten wir weiter die Koordinaten $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ für C_3.

Die Bedingung dafür, daß die Schwingungen C_1 und C_3 bei Betrachtung durch einen Analysator vom Azimut α_2 gleich hell erscheinen, besteht nach dem Vorstehenden darin, daß die Koordinaten der Punkte dem Ausdruck genügen:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i \cos(2\alpha_2 - 2\alpha_0) + \eta_i \sin(2\alpha_2 - 2\alpha_0) - p = 0 \\ p &= \xi_1 \cos(2\alpha_2 - 2\alpha_0) + \eta_1 \sin(2\alpha_2 - 2\alpha_0) \\ &= \xi_3 \cos(2\alpha_2 - 2\alpha_0) + \eta_3 \sin(2\alpha_2 - 2\alpha_0). \end{aligned}\right| \qquad (17)$$

Wir erhalten

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin\Delta_0 \sin(2\alpha_2 - 2\alpha_0)}{\sin 2\alpha_0 \cos(2\alpha_2 - 2\alpha_0) + \sin(2\alpha_2 - 2\alpha_0)\cos 2\alpha_0 \cos\Delta_0} \qquad (18)$$

und finden, daß der Ausdruck γ nicht enthält, d. h. daß die Einstellung nicht vom Amplitudenverhältnis abhängt. Dieses Verhältnis kann z. B. durch Drehung des Polarisators geändert werden, ohne die Einstellung zu beeinflussen. Dagegen ist diese nicht unabhängig von der Stellung des Analysators. Hat dieser gegen die Kristallachse das Azimut 45°, d. h. ist $2\alpha_2 = 90°$, so ist

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin\Delta_0 \cos 2\alpha_0}{1 - 2\cos^2 2\alpha_0 \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}}\,. \qquad (19)$$

Rechnen wir das Azimut vom Analysator aus: $2\psi = 90 - 2\alpha_0$, so wird

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin\Delta_0 \sin 2\psi}{1 - \sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}} \cdot \quad (20)$$

Wie bei Fall II unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Der Kompensator hat eine Phasendifferenz von mäßiger Größe. Die Formel ist direkt anwendbar, und wir erhalten für $\Delta = 0$

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2} = \frac{-\sin\Delta_0 \sin 2\psi'}{1 - \sin^2 2\psi' \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}}$$

und für Anordnung I

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin\Delta_0 \sin 2\psi}{1 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}} \cdot \quad (I)$$

Das sind zweifellos zwei sehr verschiedene Ausdrücke: Die Ausdehnung von Fresnels Satz auf Gültigkeit für 3 Kristallplatten ist unzulässig.

Formel I, die nach Kohlrauschs Lehrbuch der „praktischen Physik für Fall II, die Anordnung, wo der Halbschatten zwischen Kompensatorplatte und Analysatorprisma liegt, „streng richtig" sein soll, darf nicht auf Fall II übertragen werden. Sind aber unsere Ableitungen richtig, so müssen sich für $\Delta = 0$ identische Ausdrücke ergeben. Aus Formel II folgt

$$0 = -\operatorname{tg}\Delta_0 \sin 2\psi - \operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2}\left[\frac{1 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}}{\cos\Delta_0}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2} = \frac{-\sin\Delta_0 \sin 2\psi}{1 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}}$$

oder derselbe Wert wie direkt aus Formel I für $\Delta = 0$.

Für einen Kompensator $\Delta_0 = 90°$ ergibt sich in Fall II

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2}} + \frac{\cos^2 2\psi}{\sin 2\psi}$$

und für kleine Werte von ψ

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin\Delta_0 [\sin 2\psi' - \sin 2\psi]. \quad (21)$$

b) Die Phasendifferenz des Kompensators ist $\Delta_0 = 90°$. Es folgt

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin 2\psi}{\cos^2 2\psi}. \quad (22)$$

Im Gegensatze zu Fall IIb kann die Anordnung I b zu Meßzwecken verwendet werden. Die Lichtintensität läßt sich durch Drehung des Polarisators auf das Minimum einstellen.

Die Zusammenfassung der Ergebnisse lautet also:

für Anordnung II

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\operatorname{tg}\Delta_0 \sin 2\psi - \operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2}\left[\frac{1 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\Delta_0}{2}}{\cos\Delta_0}\right]}{1 - \operatorname{tg}\frac{\Delta_h}{2} \sin 2\psi \operatorname{tg}\Delta_0} \quad (II)$$

und in Fall I

$$\operatorname{tg}\left(\Delta + \frac{\Delta_h}{2}\right) = \frac{-\sin 2\psi}{\cos^2 2\psi},$$

woraus ebenfalls die prinzipielle Verschiedenheit der beiden Methoden hervorgeht.

Für einen Kompensator mit mäßig großer Phasendifferenz ergab sich bei Anordnung II

$$\operatorname{tg}\Delta = \operatorname{tg}\Delta_0 [\sin 2\psi' - \sin 2\psi]$$

und bei Anordnung I

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin\Delta_0 [\sin 2\psi' - \sin 2\psi].$$

Bei Messung der Phasendifferenz einer Glimmerplatte $\Delta = 8°4'$ nach Methode II erhält man mit einem Kompensator $\Delta_0 = 40°0'$ die fehlerhafte Phasendifferenz $\Delta' = 6°12'$, falls Formel I benutzt wird.

Es ist zu beachten, daß der Fehler infolge Anwendung einer unrichtigen Formel auch bei der Messung kleiner Phasendifferenzen mitspricht. Für derartige Messungen hat Wedeneewa [12] einen Kompensator von der Phasendifferenz $\Delta_0 = 30°$ empfohlen. Szivessy [13] verwendete einen Kompensator mit der Phasendifferenz $\Delta_0 = 15°$. Den prozentuellen Fehler der Phasendifferenz bei Anwendung eines Kompensators Δ_0 und der fehlerhaften Formel zeigt nachstehende Tabelle:

Δ_0	Proz.
15	3,6
20	6,5
30	13,6

In gewissen Fällen ist ein Kompensator mit sehr kleiner Phasendifferenz verwendet worden, in solchen wird man den Fehler vernachlässigen dürfen.

Es liegt eine ansehnliche Anzahl Messungen nach Methode II von Brace vor, bei denen man die unbrauchbare Formel I benutzt hat. Eine gewisse Skepsis bezüglich der Genauigkeit der Ergebnisse von Doppelbrechungsmessungen dürfte deshalb nicht der Begründung entbehren.

Zusammenfassung

Ausgehend von einer von Poincaré gegebenen Methode werden die Formeln für den Kompensator von Brace abgeleitet. Der Halbschatten kann entweder zwischen Kompensatorplatte und Polarisatorprisma (Fall I) oder zwischen Kompensatorplatte und Analysatorplatte (Fall II) eingeschaltet werden. Im Gegensatz zu der Darstellung im Handbuch der Physik XIX und in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik ergeben sich für die beiden Fälle zwei verschiedene Formeln. Jene Angaben beruhen auf unzulässiger Verallgemeinerung des Satzes von Fresnel.

Literaturverzeichnis

1) J. P. Mattieu, Journ. de Phys. **2**, 189, 1931.
2) G. Szivessy und A. Dierkesmann, Ann. d. Phys. **11**, 949, 1931.
3) D. B. Brace, Phys. Rev. **18**, 70, 1904.
4) G. Szivessy, Handbuch der Physik XIX, 946, 1928.
5) F. Kohlrausch, Praktische Physik, 17. Auflage 1935.
6) L. B. Tuckerman, Nebraska Univ. Stud. **9**, 157, 1909.
7) O. Hebecker, Diss. Göttingen 1912.
8) L. Chaumont, Ann. de Phys. **4**, 61, 1915.
9) C. Bergholm, Upsala Univ. Årsskr. 1915, I.
10) A. Fresnel, Ann. Chim. Phys. (2) **17**, 172, 1821.
11) H. Poincaré, Traité mathématique de la lumière II, Paris 1892.
12) N. Wedeneewa, Zeitschr. f. Instr.-Kunde **43**, 17, 1923.
13) G. Szivessy, Zeitschr. f. Phys. **18**, 97, 1923.

Upsala, Institut für physikalische Chemie der Universität.

(Eingegangen 2. Mai 1939)

BERICHTE

Die ballistische Lichttheorie und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. I

Von Oskar Mathias

1. Einleitung

Es war in jener Zeit, da die spezielle Relativitätstheorie bei konservativen Physikern Widerspruch zu erregen begann, als einige solche Physiker, und unter ihnen besonders W. Ritz, den Versuch unternahmen, durch eine eigene Hypothese die klassische Kinematik zu retten. Die spezielle Relativitätstheorie geht bekanntlich von zwei Prinzipien aus: Erstens vom Prinzip der Relativität und zweitens vom Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Das erstere besagt, daß nicht nur in mechanischer Hinsicht, sondern auch in optischer und elektromagnetischer alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind; oder, anders ausgedrückt, daß alle physikalischen Gesetze und nicht bloß die mechanischen für alle Inertialsysteme von der gleichen mathematischen Form sind. Das zweite Prinzip hingegen behauptet, daß die Lichtgeschwindigkeit unabhängig sei vom Bewegungszustand der Lichtquelle. Macht man die Annahme, diese beiden Prinzipien seien richtig, so gelangt man zwingend zu den berühmten Gleichungen der Lorentz-Transformation, damit zur Relativität der Gleichzeitigkeit und den anderen Konsequenzen der speziellen Theorie. Will man diesen Folgerungen entgehen, so muß man demnach wenigstens einen der beiden Grundpfeiler stürzen.

Die Verallgemeinerung des mechanischen Relativitätsprinzips, das bekanntlich schon zu den Sätzen der klassischen Physik gehört, auf alle physikalischen Erscheinungen lag sehr nahe, nachdem eine große Anzahl von aufs feinste ausgeklügelten Versuchen nicht imstande war, ein ausgezeichnetes optisches oder elektromagnetisches Bezugssystem, das man den „Äther" nannte, nachzuweisen. Der Schluß von da auf das Prinzip der Relativität ist durchaus ähnlich dem Schluß vom Mißlingen aller Konstruktionen eines Perpetuum mobile auf den ersten Hauptsatz der Wärmelehre. Diese Verallgemeinerung wurde um so weniger angefochten, als es wohl jedem Physiker durchaus sympathisch ist, die auf einem speziellen Gebiet bewährten Erfahrungssätze auf andere Gebiete zu erweitern. Deshalb fand das erste Prinzip allgemeinere Anerkennung und wurde angenommen.

Das zweite Prinzip (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) gilt bekanntlich in der alten

Äthertheorie. Wie die Geschwindigkeit der Wasserwellen in einem Teiche von der Geschwindigkeit des sie erzeugenden Steines unabhängig sind, so ist nach der Äthertheorie, die ja von diesem Bilde ihren Ausgang nahm, die Geschwindigkeit der Lichtwellen unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle, die sie erzeugt. Beseitigt man aber durch das erste Prinzip jedes ausgezeichnete Bezugssystem, also auch den Äther, so ist es zum mindesten außerordentlich fraglich, ob man dennoch dieses Prinzip übernehmen darf und kann, wobei man nun seine Gültigkeit für jedes Inertialsystem fordern muß. Hier liegt also die Möglichkeit vor, den zweiten Pfeiler zu stürzen und durch eine andere neue Hypothese die klassische Kinematik zu retten.

2. Die Hypothese von Ritz

Zur Hypothese von Ritz kommen wir nun leicht. Den Äther können wir nicht beibehalten, weil er gegen das erste Prinzip verstößt. Deshalb greifen wir auf die Newtonsche Emissionstheorie zurück, nach welcher die Lichtquelle nach allen Seiten Lichtteilchen ausschleudert. Es ist klar, daß für das Abschießen der Lichtprojektile die Lichtquelle (also gewissermaßen die „Flinte") das maßgebende Bezugssystem ist, in welchem die Geschwindigkeit der Lichtteilchen einen ganz bestimmten Wert haben muß. In jenem Inertialsystem, in welchem die Lichtquelle momentan gerade ruht, wird die Lichtgeschwindigkeit also nach allen Richtungen dieselbe sein. Nennen wir den Vektor dieser Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, so gilt demnach hier: $|\mathfrak{c}| = \text{const}$. In einem anderen Inertialsystem, in welchem das erste die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat, ist dann nach der klassischen Kinematik die Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ des betrachteten Teilchens gegeben durch:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c} + \mathfrak{v},$$

d. h. die Geschwindigkeit der Lichtquelle addiert sich geometrisch zu jener des Lichtes. Die Lichtausbreitung wird hier also als rein mechanischer Vorgang betrachtet, wie das Ausschleudern von Projektilen, und deshalb ist es nicht weiter verwunderlich, daß damit das mechanische Relativitätsprinzip nicht verletzt wird und daher auch die klassische Mechanik gewahrt bleibt, die seit jeher mit dem genannten engeren Prinzip verträglich war.

Wegen des Bildes von den ausgeschleuderten Partikeln hat man die eben entwickelte Hypothese von Ritz die „ballistische Lichthypothese" oder das „ballistische Prinzip" genannt, die auf sie gegründete Theorie die „ballistische Lichttheorie". Wir sehen, daß sie eigentlich nur aus dem Hervorheben der rein kinematischen Seite der alten Newtonschen Emissionstheorie besteht. Ihr spätes Geburtsdatum (W. Ritz, 1908) wird verständlich, wenn man sich an die Vorherrschaft der Äthertheorie in jener Zeit erinnert, in der das Zurückkehren zur Emissionstheorie als grotesker Rückschritt empfunden wurde, während wir heute von seiten der Quantentheorie her längst daran gewöhnt sind, dem Licht auch korpuskulare Eigenschaften wieder zuzuschreiben.

3. Eine Entscheidungsmöglichkeit zwischen den beiden Prinzipien

Welches der beiden einander widersprechenden Prinzipien ist nun richtig? Gilt das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit oder das Prinzip der ballistischen Lichtausbreitung? Es ist selbstverständlich, daß dies eine Frage an die Erfahrung ist. Man muß also durch Beobachtungen feststellen, ob die Geschwindigkeit des von einer bewegten Lichtquelle ausgehenden Lichtes eine andere ist als bei ruhender Quelle. Dabei fällt einem sofort die Besonderheit der zu untersuchenden Aufgabe auf, die darin liegt, daß die Lichtgeschwindigkeit enorm groß ist gegenüber der Geschwindigkeit der Lichtquellen, die ja immer materielle Körper sind. Die nach dem ballistischen Prinzip zu erwartenden Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit sind also außerordentlich klein relativ zum Wert der Lichtgeschwindigkeit selbst.

Wir wollen uns diesen Sachverhalt durch ein Gleichnis verdeutlichen: Es mögen zwei Rennwagen bestehen, die nahezu die gleiche Geschwindigkeit entwickeln können. Soll eine Entscheidung darüber getroffen werden, welcher von ihnen dem anderen dennoch etwas überlegen ist, so wird man sie nebeneinander laufen lassen, und zwar lange Zeit, d. h. über sehr große Strecken, damit auch winzige Geschwindigkeitsunterschiede sich im Laufe der Zeit zu einem merklichen Wegunterschied aufsummieren können. Sind schon in diesem Falle große Rennstrecken erforderlich, so sind es ungeheure im Falle des Lichtes. Wir kommen so zwangsläufig auf die Idee, daß sich der Unterschied in den Lichtgeschwindigkeiten, entsprechend der ballistischen Theorie, erst auf kosmischen Entfernungen bemerkbar machen kann, daß also eine Entscheidung zwischen den beiden Prinzipien auf dem Gebiet der Astronomie zu suchen ist.

4. Das Argument von De Sitter

In der Tat hat De Sitter im Jahre 1913 in einer kurzen Notiz darauf hingewiesen, daß gewisse Beobachtungen an spektroskopischen

Doppelsternen mit der Hypothese von Ritz nicht verträglich sind.

Die ballistische Hypothese ist, wie wir sahen, eingeführt worden, um die klassische Kinematik zu retten. Unser Standpunkt ist deshalb bei allen folgenden Überlegungen der folgende: Wir nehmen das ballistische Prinzip und die klassische Kinematik als richtig an, ziehen jeweils aus dieser Summe die Folgerungen und sehen zu, ob sich dabei ein Widerspruch mit Erfahrungstatsachen ergibt. Zeigt sich ein solcher, so ist damit erwiesen, daß die Verbindung „ballistisches Prinzip plus klassische Kinematik" unhaltbar, der obenerwähnte Rettungsversuch also mißglückt ist. Nicht erwiesen wäre aber durch einen solchen Widerspruch, daß das ballistische Prinzip nicht in Verbindung mit einer anderen Kinematik brauchbar sein könnte.

Zur Erläuterung der Überlegungen von De Sitter betrachten wir, der Einfachheit wegen, die kreisförmige Bahn einer Komponente eines Doppelsternes um den Schwerpunkt S des Systems (Fig. 1). Die Geschwindigkeit des

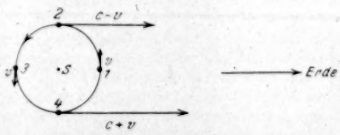

Fig. 1. Geschwindigkeit des Lichtes einer Doppelsternkomponente in der Richtung zur Erde nach dem strengen ballistischen Ansatz.

Lichtes einer Quelle, die im Schwerpunkt S ruhen würde, relativ zur Erde sei c. Bezeichnen wir die (in der Kreisbahn konstante) Bahngeschwindigkeit des Sternes mit v, so wird die Geschwindigkeit der aus den Bahnpunkten 1 und 3 zur Erde ausgesandten Strahlen nach der ballistischen Hypothese ebenfalls gleich c sein, während die von 2 ausgehenden die Geschwindigkeit $(c-v)$, die von 4 ausgehenden $(c+v)$ besitzen.

Nun können wir noch eine wichtige Vereinfachung vornehmen. Die Bahndimensionen sind ungemein klein gegenüber der Distanz der Sterne. Ferner ist die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen des Bahnhalbmessers braucht (bei den spektroskopischen Doppelsternen etwa von der Größenordnung 1^{min}) sehr klein gegenüber der Umlaufszeit des Systems (etwa von der Größenordnung 1^{d}). Wir können uns deshalb vorstellen, daß die vom Stern ständig zur Erde geschickte „Lichtschnur" statt von den jeweiligen Punkten der Bahn ständig vom Schwerpunkt S ausgeht.

In der Nähe des Doppelsternsystems wird dann die von der betrachteten Komponente ausgehende Lichtschnur die durch Fig. 2 angedeutete Beschaffenheit zeigen: Das von den Punkten 1, 2, 3, 4, 1, 2 ... ausgesendete Licht folgt in gleichen Abständen aufeinander, entsprechend den gleichen Zeiten, welche zum Durchlaufen der zugehörigen Quadranten benötigt werden. Die Marken unserer Figur trägt das Licht gewissermaßen mit sich in Form bestimmter periodisch sich ändernder Dopplerverschiebungen der Spektrallinien. In 1 und 3 sind diese Verschiebungen relativ zu S gleich Null, in 2 ist die größte Verschiebung gegen Rot vorhanden, in 4 die größte gegen Violett. Das Licht bei den Marken 2 hat aber eine etwas kleinere Geschwindigkeit als in 1 und 3, welch letztere wir die „mittlere Geschwindigkeit" der Lichtschnur nennen wollen, und bei den Marken 4 wieder ist die Lichtgeschwindigkeit etwas größer. Die Relativgeschwindigkeiten der Punkte 2 und 4 gegen die mittlere Geschwindigkeit sind in Fig. 2 durch kleine Pfeile angedeutet.

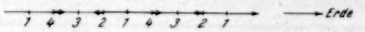

Fig. 2. Die „Lichtschnur" in der Nähe des Doppelsternes.

Fig. 3. Das Überschlagen der Lichtschnur gemäß der ballistischen Theorie in größerer Entfernung vom Doppelstern.

Ist die Lichtschnur genügend lange unterwegs, dann wird es schließlich dazu kommen müssen, daß die Punkte 4 die Punkte 3 und 2 einholen und überholen. Ein solcher Fall ist in Fig. 3 dargestellt, nur daß aus Gründen der Deutlichkeit die Zeichnung zweidimensional ist; man muß sich für den realen Fall die gezeichnete Kurve in eine Gerade zusammengedrückt denken. Aus dieser Figur sieht man sofort, daß es Querschnitte Q durch die Lichtschnur gibt, die sie dreimal schneiden, d. h. daß der Beobachter gleichzeitig Licht aus drei verschiedenen Bahnpunkten empfängt. Im besonderen Falle unserer Figur etwa liegen diese Bahnpunkte zwischen 4 und 1, nahe bei 3 und zwischen 1 und 2. Dieses Überfalten der Lichtschnur vergrößert sich im Laufe der Reisezeit immer mehr, weil ja 2 dauernd die kleinere, 4 die größere Geschwindigkeit gegenüber der mittleren besitzen. Schließlich werden mehrere Falten übereinander kommen und der Beobachter wird zugleich Licht aus 5, 7, 9 ... verschiedenen Bahnpunkten erhalten. Diese Bahnpunkte gehören,

wie eben im speziellen Fall gezeigt wurde, ganz verschiedenen Bahnstücken an; die mehrfachen Schnittpunkte der Lichtschnur mit Q tragen folglich ganz verschiedene Dopplereffekte mit sich. Der Beobachter auf der Erde müßte daher bei entsprechend weit entfernten Systemen jede Fraunhofersche Linie vielfach sehen, bei sehr großer Anzahl der Überfaltungen aber eine sehr breite und verwaschene Spektrallinie, weil hier alle die vielen Einzellinien in eine einzige zusammenfließen müßten. D. h. es wäre unmöglich, bei solchen geeignet gewählten spektroskopischen Doppelsternen einfache scharfe Spektrallinien zu sehen, was aber den tatsächlichen Beobachtungen widerspricht.

Dieser von De Sitter angegebene stärkste Einwand gegen die ballistische Hypothese ist in späteren Arbeiten noch besser ausgebaut worden indem man eine Anzahl bestimmter spektroskopischer Doppelsternsysteme aufzeigte, bei welchen gewisse Daten genügend genau bekannt und solcher Art sind, daß eine vielfache Überlagerung von Spektrallinien (bis zu 900facher!) eintreten müßte, wenn die ballistische Theorie richtig wäre. Die Beobachtungen hingegen zeigen auch bei diesen Systemen einfache scharfe Spektrallinien.

5. Ziel der folgenden Ausführungen. Verallgemeinerung des ballistischen Ansatzes

Mit den obigen Ausführungen haben wir bereits das Resultat vorweggenommen: Die Ritzsche Hypothese ist (im Verein mit der klassischen Kinematik!) nicht haltbar. Daß dennoch über die verfehlte ballistische Theorie im folgenden ausführlich berichtet werden soll, kann in zwiefacher Hinsicht rechtfertigt werden: Erstens werden von manchen Seiten noch immer Versuche gemacht, die ballistische Theorie zu verfechten und zur Erklärung der verschiedenartigsten Erscheinungen heranzuziehen. Zweitens aber ist bald nach der ersten Mitteilung von De Sitter der ballistische Ansatz verallgemeinert worden. In zwei fast gleichzeitig erschienenen Arbeiten von Guthnick und von Freundlich wird die Frage aufgeworfen, mit welcher Genauigkeit die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle erweisbar sei? Wegen der fundamentalen Bedeutung des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für die Kinematik, also die Grundlage der Physik, ist auch diese neue Fragestellung interessant und wichtig.

Die erwähnte Verallgemeinerung besteht darin, daß man nun zuläßt, daß die Geschwindigkeit der Lichtquelle nur zum Teil sich der Lichtgeschwindigkeit überlagert. Mit der Bezeichnungsweise von Abschnitt 2 macht man hier den folgenden mathematischen Ansatz. Es sei:

$$\mathfrak{C} = c + k \cdot v, \qquad 0 \leq k \leq 1$$

d. h. also, daß die Quellengeschwindigkeit nur mit einem Bruchteil ihres Wertes sich zur Lichtgeschwindigkeit addiert.

Dieser allgemeine Ansatz schließt die beiden früher betrachteten Prinzipien als extreme Fälle in sich ein. Denn:

I. $k = 0$ bedeutet die Annahme von Lorentz (Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit).

II. $k = 1$ bedeutet die Ritzsche Hypothese (ballistisches Prinzip).

III. $0 < k < 1$ gibt ein verallgemeinertes ballistisches Prinzip.

Nach Überlegungen von De Sitter kann k nicht gleich 1 sein. Wir fragen nun, welche obere Schranke man für das k aus geeigneten Beobachtungen gewinnen kann. Natürlich wird man trachten, das k möglichst nahe zur Null hinunterzudrücken.

Es soll das Ziel der folgenden Ausführungen sein, eine Übersicht und kritische Darstellung über die unsere Frage betreffenden Arbeiten zu geben. Bevor wir darauf näher eingehen, soll aber noch eine wichtige Feststellung gemacht werden.

6. Die ballistischen Hypothesen und die klassische Kinematik

Es kann leicht gezeigt werden, daß zur Rettung der klassischen Kinematik nur der strenge ballistische Ansatz (Ritzsche Hypothese, $k = 1$) taugt. Wir betrachten dazu ein Inertialsystem J_1 (Fig. 4), in dessen Ursprung die Lichtquelle L

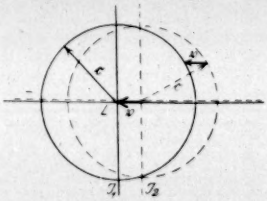

Fig. 4. Allgemeiner ballistischer Ansatz und Relativität der Gleichzeitigkeit.

gerade ruhen möge. Von L werde ein Lichtblitz ausgesendet, der etwa nach 1 sec die ausgezogene Kugelfläche erreicht hat. Nun betrachten wir denselben Vorgang von einem anderen Inertialsystem J_2, in welchem L die Geschwindigkeit v

besitzt und das der Einfachheit wegen so gewählt sei, daß im Augenblick der Emission des Lichtblitzes die beiden Koordinatenanfänge zusammenfallen. Die Lage dieses Systems für den Zeitpunkt 1 sec nach der Emission ist in der Figur durch das strichlierte Achsenkreuz angedeutet. Wir wollen nun der Reihe nach die drei Annahmen I–III von oben zulassen.

I. Für $k = 0$ (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Lorentz, Einstein) muß die Ausbreitungsgeschwindigkeit in J_2 ebenfalls gleich c sein, wie in J_1, unabhängig davon, daß L in J_2 bewegt ist. Auch in J_2 blitzt das Licht im Ursprung auf und pflanzt sich nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit c fort. Nach 1 sec wird sich daher der Lichtimpuls bis auf die gestrichelte Kugelfläche ausgebreitet haben (wir legen ja überall unseren Überlegungen die klassische Kinematik zugrunde!). Dieser Tatbestand ist aber mit der klassischen Kinematik bereits in Widerspruch; denn es kann nicht dasselbe Ereignis zur gleichen Zeit verschiedene Raumgebiete erfüllen (die ausgezogene sowohl als auch die gestrichelte Kugelfläche). Die Lösung dieses Widerspruches durch die spezielle Relativitätstheorie ist bekannt: Es muß die Gleichzeitigkeit relativiert werden. Daß dies möglich ist und darin keineswegs irgendwelche erkenntnistheoretische Schwierigkeiten liegen, wird in der Relativitätstheorie gezeigt[1]). Nach ihr entsprechen eben die beiden Kugelflächen unserer Figur nicht demselben Zeitpunkt, sind also nicht gleichzeitig, womit die obige Schwierigkeit verschwindet.

II. Bei $k = 1$ (Ritz) gilt für die Geschwindigkeit in J_2:

$$\mathfrak{C} = c + v ,$$

wir haben also zu jedem strichlierten Pfeil c noch den kleinen ausgezogenen v zu addieren, um den Vektor der Lichtgeschwindigkeit zu erhalten. Man sieht sofort, daß man damit wieder zur ausgezogenen Kugel kommt, welche demnach den Ort des Lichtimpulses nach 1 sec auch im System J_2 darstellt. Das ist dieselbe Lage, die er im System J_1 in diesem Zeitpunkt besitzt, entsprechend der Kinematik und dem Gleichzeitigkeitsbegriff der klassischen Physik. Die Ritzsche Annahme ist also mit der klassischen Kinematik verträglich, was uns natürlich nicht wundert, weil diese Annahme doch zu diesem Zwecke gemacht wurde.

III. Für $0 < k < 1$ gilt:

$$\mathfrak{C} = c + k \cdot v .$$

Hier ist zum Vektor c nur ein Bruchteil von v zu addieren und man sieht an unserer Figur unmittelbar, daß man so zu einer Kugelfläche kommt, welche gegen die ausgezogene Kugel verschoben ist. Daß sie weniger verschoben ist als die strichlierte, nützt uns nichts. Auch hier muß die Gleichzeitigkeit relativiert werden, damit der Widerspruch verschwindet, daß dasselbe Ereignis zum selben Zeitpunkt verschiedene Raumgebiete erfüllt. Der allgemeine ballistische Ansatz ist daher nicht geeignet, die klassische Kinematik zu retten.

1) Siehe etwa die Aufsätze des Verfassers über „Michelson-Versuch und Relativitätstheorie" in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Jahrg. **44**, S. 223 und 270, besonders S. 226, Abs. 6.

7. Einiges über Bahnbestimmung bei spektroskopischen Doppelsternen

Um auf die uns interessierende Frage näher einzugehen, brauchen wir eine kleine astronomische Vorbereitung: Wir müssen uns darüber informieren, wie eine Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne vorgenommen werden kann, welche Elemente der Bahn bestimmbar sind und was für Daten für diesen Zweck zur Verfügung stehen. Dabei wollen wir uns an eine Methode halten, die von Lehmann-Filhés entwickelt wurde und sich unter den verschiedenen Methoden zur Lösung der genannten Aufgabe durch große Einfachheit und zum Teil Anschaulichkeit auszeichnet.

Wir setzen voraus, es sei aus spektroskopischen Beobachtungen nach dem Dopplerschen Prinzip die Geschwindigkeitskurve eines spektroskopischen Doppelsternes bestimmt worden, d. h. es sei die Radialgeschwindigkeit Γ als Funktion der Zeit aus einer hinreichend großen Reihe von Einzelbeobachtungen ermittelt. Dabei sei aber von den sich unmittelbar ergebenden Werten der Radialgeschwindigkeit schon die von der Erdbewegung herrührende Komponente abgezogen, so daß Γ die heliozentrische Radialgeschwindigkeit der einen Komponente des Doppelsternes sei. Ist die Lage der Spektrallinien beider Komponenten meßbar, so wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, daß die Dopplerverschiebungen nicht relativ gemessen seien, sondern absolut, d. h. gegenüber einer „ruhenden" Linie des Vergleichsspektrums. Γ als Funktion der Zeit gibt die „Geschwindigkeitskurve", etwa wie in Fig. 5.

Γ setzt sich aus 2 Komponenten zusammen: aus der konstanten Radialgeschwindigkeit γ_0 des Schwerpunktes im Doppelsternsystem gegen die Sonne, und aus der periodisch sich ändernden Radialgeschwindigkeit γ des Sternes um jenen Schwerpunkt. Es gilt also:

$$\Gamma = \gamma_0 + \gamma . \qquad (1)$$

Es ist klar, daß wir ein Element der Doppelsternbahn sofort aus der Geschwindigkeitskurve ermitteln können, nämlich die Umlaufszeit U. Sie ergibt sich durch Ermittlung jenes Zeitintervalles, welches zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichen Phasen der Geschwindigkeitskurve liegt, etwa zwischen zwei Maximis von Γ (siehe Fig. 5). Zur genauen Ermittlung

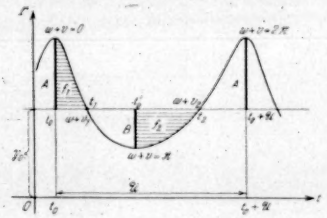

Fig. 5. Beispiel einer Radialgeschwindigkeits-Kurve eines spektroskopischen Doppelsternes.

von U wird man natürlich das Zeitintervall zwischen zwei zeitlich sehr weit auseinanderliegenden gleichen Phasen ermitteln und durch die Anzahl der dazwischenliegenden Perioden dividieren. Bei bekanntem U kann man dann alle außerhalb des in Fig. 5 gezeichneten Zeitintervalles gemessenen Radialgeschwindigkeiten in dieses Intervall hineinreduzieren und durch Ausgleichung der vielen Beobachtungen die Geschwindigkeitskurve verbessern. Von ihrer Genauigkeit hängt natürlich die Genauigkeit der bestimmten Bahnelemente ab.

Nun müssen wir die relative Radialgeschwindigkeit γ gegen den Schwerpunkt als Funktion der Bahnelemente und der Zeit darstellen. Dabei setzen wir voraus, daß die Relativbewegung der Komponenten des Doppelsternes nach den Keplerschen Gesetzen verläuft, also dem reinen Zweikörperproblem entspricht. Abweichungen von dieser Bewegung würden sich übrigens bald durch periodische Änderungen der Geschwindigkeitskurve bemerkbar machen.

Als Fundamentalebene, auf welche wir die Elemente der Bahnlage beziehen, wählen wir jene durch den Schwerpunkt des Systems gehende Ebene, welche senkrecht zum Visionsradius (= Gesichtslinie Erde–Stern) steht. Leitlinie sei die Schnittgerade dieser Ebene mit der Stundenkreisebene durch den Sternort. Der aufsteigende Knoten (K) sei jener Schnittpunkt der Bahn mit der Fundamentalebene, in welchem sich der Stern von uns entfernt. Dann ist die Lage der Bahnebene bekanntlich bestimmt durch die beiden Elemente Ω und i, wo Ω die „Länge des aufsteigenden Knotens" bedeutet, d. i. der Winkel zwischen der Knotenlinie $\overline{SK}$ und der Leitlinie, und i die „Neigung der Bahn" gegen die Fundamentalebene (siehe Fig. 6).

Die Lage der Bahnellipse in der Bahnebene wird durch das „Argument des Periastrons" ω

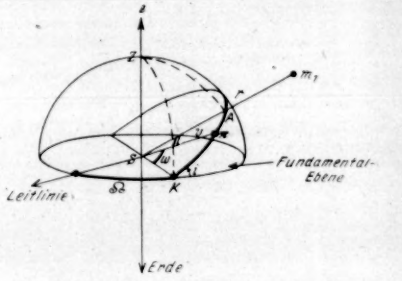

Fig. 6. Bahnelemente einer Doppelsternbahn.

bestimmt, d. i. der im Sinne der Bewegung gezählte Winkel zwischen der Knotenlinie $\overline{SK}$ und der Richtung zum Periastron $\overline{S\Pi}$. Die Bahnellipse sei bestimmt durch die Elemente a und ε, wo a die große Halbachse (= „mittlere Entfernung" der beiden Komponenten) und ε die Exzentrizität bedeutet. Die Bahnellipse um den Schwerpunkt ist natürlich der relativen Bahnellipse der beiden Sterne umeinander ähnlich. Die große Halbachse für die Relativbewegung der einen betrachteten Komponente von der Masse m_1 um den Schwerpunkt sei a_1. Schließlich sei T das „phoronomische Element", d. i. die Zeit des Durchganges durch das Periastron.

Wir legen den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in den Schwerpunkt S und orientieren es so, daß seine positive z-Achse in den Visionsradius (im Sinne wachsender Entfernung von der Erde) fällt (siehe Fig. 6). Bezeichnen wir die momentane Entfernung $\overline{Sm_1}$ mit r, die wahre Anomalie ($\Pi S m_1$) mit v, so folgt für die z-Koordinate von m_1 sofort:

$$z = r \cdot \cos(m_1 S Z),$$

oder, wenn aus dem sphärischen Dreieck (AKZ) dieser cos berechnet wird:

$$z = r \cdot \sin(\omega + v) \cdot \sin i \,. \qquad (2)$$

Unsere Radialgeschwindigkeit γ ist nun nichts anderes als $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$. In der obenstehenden Gleichung sind rechter Hand die Größen r und v mit der Zeit veränderlich. Leitet man diese Gleichung nach der Zeit ab, so treten die Ab-

leitungen $\dot{r}$ und $\dot{v}$ auf; nun gilt nach dem Flächensatz:

$$r^2 \cdot \dot{v} = \text{const} = \varkappa \sqrt{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{p_1},$$

wo $\varkappa$ die Gravitationskonstante, p_1 der Parameter der Bahn bezüglich S, also

$$p_1 = a_1 (1 - \varepsilon^2)$$

ist. Aus dem Flächensatz läßt sich $\dot{v}$ berechnen und in der Ableitung des z einsetzen. Das $\dot{r}$ aber drückt man leicht durch $\dot{v}$ aus vermöge der Kegelschnittsgleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos v}.$$

Führt man noch die „mittlere tägliche Bewegung n" ein, also die mittlere Winkelgeschwindigkeit im System, für welche bekanntlich die Gleichung besteht:

$$n = \frac{2\pi}{U} = \frac{\varkappa \sqrt{m_1 + m_2}}{a_1^{3/2}},$$

so erhält man nach einer kurzen Rechnung mit einfachen Umformungen:

$$\gamma = \frac{dz}{dt} = \frac{n \cdot a_1 \cdot \sin i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\varepsilon \cos \omega + \cos (\omega + v)\right]. \quad (3)$$

Das ist die Grundformel, auf welche sich die folgenden Überlegungen stützen. Der vor der eckigen Klammer stehende Faktor ist konstant, ebenso der erste Term in dieser Klammer. Die Veränderlichkeit mit der Zeit steckt einzig im v, das im Argument des zweiten Summanden der Klammer steht. Der Zusammenhang der wahren Anomalie mit der Zeit ist aber bekanntlich ein komplizierter und führt über die transzendente Keplersche Gleichung. Daher wird im allgemeinen auch die Geschwindigkeitskurve als Funktion der Zeit eine komplizierte analytische Form besitzen und nur im einfachen Falle der Kreisbahn ($\varepsilon = 0$), wo v nach dem Flächensatz der Zeit proportional ist, wird die Geschwindigkeitskurve, wie aus Gleichung (3) ersichtlich wird, eine einfache Kosinuslinie bilden.

Zunächst kennen wir nicht die Größe γ als Funktion der Zeit, sondern bloß Γ. Es ist aber einfach, das konstante γ_0 zu bestimmen, denn es gilt:

$$\int_{t_0}^{t_0+U} \gamma \, dt = \int_{t_0}^{t_0+U} \frac{dz}{dt} \cdot dt = z \Big|_{t_0}^{t_0+U} = 0,$$

weil nach einem vollen Umlauf U der Stern an denselben Punkt der relativen Bahn zurückgekehrt ist, daher seine z-Koordinate die gleiche ist, wie vor der Zeit U. Dieses Verschwinden des Integrals über γ, erstreckt über eine volle Periode, machen wir uns für die Bestimmung des γ_0 zunutze. Wegen Gleichung (1) wird:

$$\int_{t_0}^{t_0+U} \Gamma dt = \int_{t_0}^{t_0+U} \gamma_0 dt + \int_{t_0}^{t_0+U} \gamma \, dt = \gamma_0 \cdot U,$$

weil das zweite Integral rechts verschwindet und γ_0 eine Konstante ist. Daraus folgt

$$\gamma_0 = \frac{1}{U} \int_{t_0}^{t_0+U} \Gamma \cdot dt. \quad (4)$$

Das rechts stehende Integral stellt die Fläche dar, welche (Fig. 5) vom Abszissenintervall U, den zugehörigen Ordinaten und der Geschwindigkeitskurve begrenzt wird, und sein Wert ist mit Hilfe eines Planimeters leicht bestimmbar. Damit ist auch nach Gleichung (4) γ_0 ermittelt.

Ziehen wir in unserer Fig. 5 eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand γ_0, so geben die Ordinaten der Geschwindigkeitskurve, bezogen auf diese neue Abszissenachse, direkt die γ, also die Radialgeschwindigkeiten relativ zum Schwerpunkt, wie sie in Gleichung (3) dargestellt sind. Auf diese Darstellung der Kurve beziehen sich die folgenden Überlegungen.

Unsere Aufgabe liegt nun darin, die folgenden 7 Elemente zu bestimmen: Ω, i, ω, a_1, ε, T und die Massensumme $(m_1 + m_2)$, oder die von dieser Summe abhängigen Elemente U oder n. In der Gleichung (3) kommt, wie man sofort sieht, eines dieser Elemente überhaupt nicht vor, nämlich der Ω. Es ist daher aus spektroskopischen Beobachtungen allein nicht möglich, dieses Element zu bestimmen. Dieses Resultat ist anschaulich unmittelbar einleuchtend; denn wie auch immer die ganze als starr gedachte Bahn um die Gesichtslinie gedreht werden mag (bei welcher Drehung also nur das Element Ω geändert wird, während alle übrigen konstant bleiben), so ändert sich dabei die Projektion der Geschwindigkeit auf die Gesichtslinie, also die Radialgeschwindigkeit, nicht, und diese Größe allein läßt sich spektroskopisch ermitteln.

Die übrigen 6 Elemente kommen in Gleichung (3) alle vor, das T allerdings versteckt im v, welches ja vom Periastron an gezählt wird. Von ihnen läßt sich n sofort bestimmen, da U bereits bekannt ist. Es ist:

$$n = \frac{2\pi}{U}. \quad (5)$$

Den konstanten Faktor vor der eckigen Klammer in Gleichung (3) wollen wir mit C bezeichnen:

$$\frac{n a_1 \sin i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = C . \qquad (6)$$

Der Faktor C enthält außer dem schon bekannten n noch a_1, i und ε. Letzteres tritt außerdem noch in der eckigen Klammer auf, a_1 und i stehen aber nur im C, und zwar in der Verbindung $a_1 \cdot \sin i$. Gelingt es, aus der Geschwindigkeitskurve das C und ε zu bestimmen, so ist aus Gleichung (6) damit auch mit dem bekannten n sofort das $(a_1 \cdot \sin i)$ anzugeben. Da aber weder a_1 noch i an anderer Stelle auftreten, ist es unmöglich, diese beiden Elemente gesondert zu berechnen. Weil Ω nach dem oben Gesagten überhaupt ausscheidet, bleiben demnach die folgenden 5 „Elemente" zu ermitteln:

$$n, (a_1 \cdot \sin i), \varepsilon, \omega, T ,$$

von welchen n bereits bekannt ist.

Zur Bestimmung der anderen Elemente entnimmt man nach Lehmann-Filhés der Geschwindigkeitskurve (Fig. 5) die folgenden Daten: A sei das größte positive γ, B der Betrag des kleinsten γ. Die zugehörigen Zeiten seien t_0 und t_0'. Die Abszissen der beiden Nullstellen von γ seien t_1 und t_2. Schließlich lassen sich mit Hilfe eines Planimeters die in der Figur schraffierten Flächen f_1 und f_2 leicht ausmessen, welche über den Intervallen $\overline{t_0 t_1}$ bzw. $\overline{t_0' t_2}$ liegen. f_2 ist dabei negativ.

Mit der in Gleichung (6) eingeführten Abkürzung wird unsere Grundformel (3):

$$\gamma = C\left[\varepsilon \cos\omega + \cos(\omega + v)\right] . \qquad (7)$$

Weil $C > 0$ ist, erreicht γ seinen größten Wert, wenn der hier auftretende, mit der Zeit veränderliche cos sein Maximum erreicht, also 1 wird, sein Argument $(\omega + v)$ also gleich 0 ist.

Für $t = t_0$ gilt also:

$$\omega + v = 0 , \qquad (8)$$

$$A = C \cdot (\varepsilon \cos\omega + 1) . \qquad (9)$$

Ganz analog schließen wir für das Minimum von γ:

für $t = t_0'$ ist:

$$\omega + v = \pi , \qquad (10)$$

$$B = -C \cdot (\varepsilon \cos\omega - 1) . \qquad (11)$$

Das negative Zeichen rechts kommt daher, daß wir mit B den Betrag des Minimums von γ bezeichneten.

Aus Gleichung (9) und (11) folgt nun sofort:

$$C = \frac{A+B}{2} \qquad (12)$$

und

$$\varepsilon \cos\omega = \frac{A-B}{2C} = \frac{A-B}{A+B} . \qquad (13)$$

Gleichung (12) zeigt, daß die eingeführte Größe C die Bedeutung der halben Amplitude der Radialgeschwindigkeit γ besitzt. Das Argument $\omega + v$ bedeutet den Winkelabstand der Doppelsternkomponente vom aufsteigenden Knoten K gezählt in der Bahnebene (siehe Fig. 6). Aus Gleichung (8) und (10) ersieht man also, daß die maximale Radialgeschwindigkeit im aufsteigenden Knoten erreicht wird, die minimale im absteigenden. In Fig. 5 sind die Werte für $\omega + v$ bei den betreffenden Stellen der Kurve für spätere Zwecke vermerkt.

Wir wollen nun zeigen, daß mit Hilfe der gemessenen Flächen f_1 und f_2 auch $\varepsilon \cdot \sin\omega$ ermittelt werden kann. Gelingt dies, so ist im Verein mit Gleichung (13), die rechts nur bekannte Größen enthält, sofort ε und ω bestimmt.

Nach seiner Definition ist f_1 bestimmt durch:

$$f_1 = \int_{t_0}^{t_1} \gamma\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dz}{dt} \cdot dt = z_{t_1} - z_{t_0} .$$

Nun ist aber, wie wir eben sahen, für $t = t_0$ das $(\omega + v) = 0$, daher wegen Gleichung (2):

$$z_{t_0} = 0 .$$

Bezeichnen wir noch zur Abkürzung die variablen Größen für die Zeit t_1 einfach durch den Index 1, so wird, wieder mit Berücksichtigung von Gleichung (2):

$$f_1 = z_1 = r_1 \cdot \sin(\omega + v_1) \cdot \sin i . \qquad (14)$$

Ganz analog ergibt sich, wenn man die Größen für die Zeit t_2 mit dem Index 2 bezeichnet:

$$f_2 = z_2 = r_2 \cdot \sin(\omega + v_2) \cdot \sin i . \qquad (15)$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, daß wir durch die Flächen f_1 und f_2 die z-Koordinaten jener Punkte bestimmt haben, für welche $\gamma = \frac{dz}{dt} = 0$ ist (für t_1 und t_2). z_1 ist also das größte z, z_2 das kleinste.

Wir wollen nun die Argumente $(\omega + v_1)$ und $(\omega + v_2)$ vergleichen. In den ihnen entsprechenden Bahnpunkten muß nach ihrer Definition (Fig. 5) $\gamma = 0$ sein. D. h. es muß nach Gleichung (7) gelten:

$$\cos(\omega + v_1) = -\varepsilon \cos\omega , \qquad (16)$$

$$\cos(\omega + v_2) = -\varepsilon \cos\omega . \qquad (17)$$

Diese beiden cos sind also einander gleich. Daraus folgt, daß die Argumente entweder ebenfalls einander gleich sein müssen, oder aber daß sie absolut genommen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Der erste Fall ist auszuschließen, weil die Gleichheit der Argumente einem einzigen Bahnpunkt entsprechen würde, während bei uns die Zeitpunkte t_1 und t_2 verschiedenen Punkten des Umlaufes zugehören. Es gilt also der zweite Fall:

$$\omega + v_1 = -(\omega + v_2),$$

und daraus folgt:

$$\sin(\omega + v_1) = -\sin(\omega + v_2). \qquad (18)$$

Beachten wir diese Gleichung und dividieren Gleichung (14) durch (15), so wird:

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{r_1}{r_2},$$

und weiter, wenn die Kegelschnittsgleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v}$$

für die beiden Bahnpunkte (r_1, v_1) und (r_2, v_2) berücksichtigt wird:

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{1 + \varepsilon \cos v_2}{1 + \varepsilon \cos v_1}. \qquad (19)$$

Die Ausdrücke rechts können wir nun in einfacher Weise umformen:

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon \cos v_2 &= 1 + \varepsilon \cos(\omega + v_2 - \omega) \\ &= 1 + \varepsilon \cos(\omega + v_2) \cdot \cos\omega \\ &\quad + \varepsilon \sin(\omega + v_2) \cdot \sin\omega. \end{aligned}$$

Setzt man für $\varepsilon \cdot \cos\omega$ aus Gleichung (17) das $-\cos(\omega + v_2)$, so wird:

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon \cos v_2 &= 1 - \cos^2(\omega + v_2) + \varepsilon \sin(\omega + v_2) \sin\omega \\ &= \sin(\omega + v_2)\left[\sin(\omega + v_2) + \varepsilon \sin\omega\right]. \end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich unter Beachtung von Gleichung (16):

$$1 + \varepsilon \cos v_1 = \sin(\omega + v_1)\left[\sin(\omega + v_1) + \varepsilon \sin\omega\right].$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in Gleichung (19) ein, so wird:

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{\sin(\omega + v_2)}{\sin(\omega + v_1)} \cdot \frac{\sin(\omega + v_2) + \varepsilon \sin\omega}{\sin(\omega + v_1) + \varepsilon \sin\omega}.$$

Setzt man hier für $\sin(\omega + v_2)$ aus Gleichung (18) ein, so hat man:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\varepsilon \sin\omega - \sin(\omega + v_1)}{\varepsilon \sin\omega + \sin(\omega + v_1)}$$

und die Auflösung nach $\varepsilon \sin\omega$ ergibt:

$$\varepsilon \sin\omega = \sin(\omega + v_1) \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1}. \qquad (20)$$

Der hier noch unbekannte $\sin(\omega + v_1)$ kann aber leicht aus Gleichung (16) und (13) berechnet werden; nach diesen Gleichungen gilt:

$$\cos(\omega + v_1) = -\varepsilon \cos\omega = -\frac{A - B}{A + B}.$$

Der $\sin(\omega + v_1)$ ist aber sicher positiv, weil sein Argument $(\omega + v_1)$ zwischen den Werten $\omega + v = 0$ und $\omega + v = \pi$ liegt (siehe Fig. 5). Es ist also:

$$\begin{aligned} \sin(\omega + v_1) &= +\sqrt{1 - \cos^2(\omega + v_1)} \\ &= +\frac{2\sqrt{A \cdot B}}{A + B}, \end{aligned}$$

und in Gleichung (20) eingesetzt gibt das:

$$\varepsilon \sin\omega = +\frac{2\sqrt{A \cdot B}}{A + B} \cdot \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1}. \qquad (21)$$

$$\varepsilon \cos\omega = \frac{A - B}{A + B}. \qquad (13)$$

Aus diesen beiden Gleichungen, die rechts nur mehr bekannte Größen enthalten, folgt sofort ε und ω. Diese beiden Formeln werden wir im folgenden verwenden. Der Vollständigkeit wegen soll jedoch noch gezeigt werden, wie die beiden restlichen Elemente $(a_1 \cdot \sin i)$ und T bestimmt werden können. Zunächst folgt aus Gleichung (6):

$$a_1 \sin i = C\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{n} = \frac{A + B}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{n}, \qquad (22)$$

wobei für C aus Gleichung (12) eingesetzt wurde. Hier stehen, da ε und n schon bekannt sind, rechts wieder lauter bekannte Größen.

Für die Zeit T schließlich muß $v = 0$ sein und daher nach Gleichung (7):

$$\gamma_T = C(1 + \varepsilon)\cos\omega = \frac{A + B}{2} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \cos\omega. \qquad (23)$$

Damit ist γ_T bekannt und wir haben in unserer Figur bloß jene Abszisse aufzusuchen, welche diesem γ_T der Kurve entspricht. Die Zweideutigkeit, die hierbei auftritt, können wir leicht beseitigen; denn wir wissen (Fig. 5), daß der absteigende Ast der Geschwindigkeitskurve den Werten $v = -\omega$ bis $v = \pi - \omega$ entspricht, der aufsteigende Ast hingegen den Werten von $v = \pi - \omega$ bis $v = 2\pi - \omega$. Da ω schon bekannt

ist, kennen wir also die Grenzen für das v in diesen beiden Ästen und suchen natürlich das T in jenem Ast, welcher $v = 0$ enthält. Damit ist auch die Periastronzeit T bestimmt.

Bei allen diesen Überlegungen hatten wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitskurve, wie wir sie aus den Beobachtungen gewinnen, die Radialgeschwindigkeiten der betrachteten Doppelsternkomponente wirklich richtig wiedergibt, d. h. so, wie sie einem Beobachter in der Nachbarschaft des Sternes durch den Dopplereffekt vermittelt würde, oder wie sie einem weit entfernten Beobachter bei Gültigkeit des Lorentzschen Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erscheinen würde. Im folgenden Abschnitt soll die Frage untersucht werden, welche Veränderungen in Form und Lage die Geschwindigkeitskurve erleidet, wenn die verallgemeinerte ballistische Hypothese gilt.

8. Die Deformation der Geschwindigkeitskurve infolge ballistischer Lichtausbreitung

Im Abschnitt 5 haben wir uns die Aufgabe gestellt, eine kritische Übersicht über die Arbeiten zur ballistischen Lichttheorie zu geben. Nach dieser Theorie addiert sich die Geschwindigkeit der Lichtquelle ganz oder teilweise zu der des Lichtes im Ruhsystem der Quelle geometrisch, entsprechend dem allgemeinen Ansatz:

$$\mathfrak{C} = c + k \cdot v, \qquad 0 < k \leq 1 .$$

Eine dazu notwendige, wichtige Vorbereitung wurde bereits behandelt: Es wurde gezeigt, wie man aus der durch spektroskopische Beobachtungen gewonnenen „Geschwindigkeitskurve" eines spektroskopischen Doppelsternes seine Bahnelemente bestimmen kann. Es wird dabei angenommen, daß die aus den Beobachtungen gewonnene Geschwindigkeitskurve die Radialgeschwindigkeiten der betrachteten Doppelsternkomponente richtig wiedergibt, d. h. so, wie sie einem Beobachter in der Nachbarschaft des Sternes durch den Dopplereffekt vermittelt würde, oder wie sie einem weit entfernten Beobachter bei Gültigkeit des Lorentzschen Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erscheinen würde. Wir wollen uns nun fragen: Welche Veränderungen in Form und Lage zeigt die aus den Dopplereffekten erschlossene Geschwindigkeitskurve gegenüber jener wahren, wenn die verallgemeinerte ballistische Hypothese gilt?

Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, wie die empfangene Frequenz ν' vom Bewegungszustand der Lichtquelle abhängt; denn von dieser empfangenen Frequenz schließen wir nach dem Dopplerprinzip auf die Radialgeschwindigkeit. Für die Abhängigkeit des ν' vom Bewegungszustand der Lichtquelle wollen wir zwei Annahmen machen und sie für den extremen Fall der Ritzschen Hypothese ($k = 1$, also den strengen ballistischen Ansatz) anschaulich deuten.

A. Man kann zunächst annehmen, daß die Geschwindigkeit C jedes ganzen kohärenten Wellenzuges durch die Geschwindigkeit der Lichtquelle im Augenblick der Emission bestimmt wird, so daß

$$C = c - \gamma \text{ [1]}$$

ist, wo, wie früher, die Radialgeschwindigkeit der betrachteten Doppelsternkomponente mit γ, die Lichtgeschwindigkeit einer im Schwerpunkt des Doppelsternsystems ruhenden Lichtquelle mit c bezeichnet ist. In diesem Fall ist es so, als ob jeder kohärente Wellenzug (jedes „Quant") ein starres Gebilde wäre, etwa wie eine auf Draht aufgefädelte Perlenreihe (wobei die einzelnen Perlen die Wellenberge verbildlichen sollen) und nur die ganze Reihe auf einmal emittiert werden kann. Diese Vorstellung der spontanen Emission ist bekanntlich durch die Quantentheorie des Lichtes eingeführt worden. Der Dopplereffekt kommt nun dadurch zustande, daß der starre Wellenzug etwa bei sich entfernender Lichtquelle, mit geringerer Geschwindigkeit über den Beobachter oder seinen Spektrographen streicht als bei $\gamma = 0$. Ist ν die „Ruhfrequenz" der betrachteten Spektrallinie, so befinden sich auf der Strecke c der Lichtschnur ν Wellenberge, auf der Längeneinheit daher $\frac{\nu}{c}$ und auf der in einer Sekunde über den Beobachter gleitenden Strecke von der Länge $c - \gamma$ folglich $\nu' = \frac{\nu}{c}(c - \gamma)$ Wellenberge. Die beobachtete Frequenz ist also:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{\gamma}{c}\right).$$

Diese Gleichung entspricht aber genau dem Dopplereffekt der alten Äthertheorie (für den Fall einer ruhenden Lichtquelle und eines bewegten Beobachters). Die erste Annahme, die wir machen können, ist also derart, daß die Dopplerverschiebung, nach der klassischen Theo-

1) Daß hier im Gegensatz zur früher angegebenen Gleichung $\mathfrak{C} = c + v$ die radiale Komponente des v, also γ, das negative Vorzeichen trägt, rührt daher, daß man in der Astronomie die vom Beobachter fortgerichteten Radialgeschwindigkeiten positiv zählt.

rie gedeutet, uns die richtige Radialgeschwindigkeit liefert. Hier werden demnach durch den ballistischen Ansatz nur die Zeiten des Eintreffens der einzelnen Wellenzüge verändert, d. h. die Abszissen der einzelnen Punkte der Geschwindigkeitskurve, während die Ordinaten aller Punkte (die Radialgeschwindigkeiten) unverändert bleiben.

B. Wir können aber auch annehmen, daß jeder einzelne Wellenberg mit einer Geschwindigkeit nach dem ballistischen Ansatz emittiert wird. Im Gleichnis mit der Perlenschnur werden hier die Perlen gewissermaßen einzeln und nicht aufgefädelt ausgeschleudert. Oder man kann sie sich auf einem beliebig dehnbaren Gummischnürchen aufgefädelt denken, wenn man ihre Verbundenheit zu einem kohärenten Zug auch im Modell irgendwie zum Ausdruck bringen will. Bei konstanter Radialgeschwindigkeit ergibt sich hier keine andere Dopplerverschiebung der Spektrallinien als wie im vorigen Fall, wie man leicht einsieht, wenn man an das Inertialsystem denkt, in welchem die Lichtquelle ständig ruht. Nehmen wir aber an, die Radialgeschwindigkeit sei etwa von uns fortgerichtet und nehme ständig zu, dann wird nach unserer neuen Annahme jeder in der Richtung zur Erde später ausgesendete Wellenberg eine etwas geringere Geschwindigkeit haben als seine Vorgänger, muß also ständig hinter ihnen zurückbleiben. Dieser Effekt der Dehnung (oder Schrumpfung) des Wellenzuges wird wachsen, je länger der Zug unterwegs ist, d. h. je größer die Distanz des Sternes von uns ist. Da die Geschwindigkeit, mit der ein solcher Wellenzug über den Beobachter streicht, gegenüber dem früheren Fall nicht wesentlich verändert ist, so muß wegen der Dehnung oder Schrumpfung unserer elastischen Perlenschnur die empfangene Frequenz und damit die Dopplerverschiebung hier wesentlich geändert sein gegenüber dem vorigen Fall. Deuten wir diese beobachtete Dopplerverschiebung nun nach der klassischen Optik, so gelangen wir zu falschen Werten der Radialgeschwindigkeit. Hier werden also auch die Ordinaten der Geschwindigkeitskurve verändert. Man nennt diesen Effekt, weil er nur bei beschleunigter Radialgeschwindigkeit auftritt, den „ballistischen Beschleunigungseffekt". Zum Unterschied davon wollen wir den nach der ballistischen Theorie auf jeden Fall eintretenden Effekt der Verlagerung der Abszissen in der Geschwindigkeitskurve den „ballistischen Geschwindigkeitseffekt" nennen, weil seine Größe allein von der jeweiligen Radialgeschwindigkeit der Lichtquelle abhängt.

Wir gehen nun daran, die Größe dieser beiden Effekte zu berechnen.

A. Die Verlagerung der Abszissen

(„Ballistischer Geschwindigkeitseffekt")

Nach dem allgemeinen ballistischen Ansatz ist die Geschwindigkeit des Lichtes, das uns eine Doppelsternkomponente zusendet, bestimmt durch:

$$C = c - k \cdot \gamma .$$

Die Entfernung des Schwerpunktes des Binärsystems von uns sei D. Dann ist die Zeit, nach welcher das Licht aus irgendeinem Bahnpunkt mit der Radialgeschwindigkeit γ bei uns eintrifft, also seine Reisedauer (Δt):

$$\left.\begin{aligned}(\Delta t) &= \frac{D}{c - k \cdot \gamma} = \frac{D}{c\left(1 - k\,\frac{\gamma}{c}\right)} \\ &= \frac{D}{c} \cdot \left[1 + k \cdot \frac{\gamma}{c} + \left(k\,\frac{\gamma}{c}\right)^2 + \cdots\right],\end{aligned}\right| \qquad (24)$$

wobei wir, wie schon in Abschnitt 4, die Bahndimensionen gegenüber der außerordentlich viel größeren Distanz D vernachlässigt haben.

Nun ist $\frac{\gamma}{c}$ eine kleine Größe gegenüber der Einheit. Für die größten in Binärsystemen vorkommenden Radialgeschwindigkeiten kann man etwa $\gamma = 300$ km/sec setzen, so daß $\frac{\gamma}{c} \leq \frac{1}{1000}$ ist. Bedenkt man noch, daß k ein echter Bruch ist, so erkennt man, daß man die zweiten und höheren Potenzen von $\left(k \cdot \frac{\gamma}{c}\right)$ in Gleichung (1) vernachlässigen kann. Damit wird Gleichung (1):

$$(\Delta t) = \frac{D}{c} + \frac{D \cdot k}{c^2} \cdot \gamma . \qquad (25)$$

Der erste Term rechts entspricht der konstanten zeitlichen Verschiebung, die auch nach der Äthertheorie vorhanden ist und uns nicht weiter interessiert. Während aber nach der Äthertheorie nur diese konstante Verschiebung zwischen Abgangs- und Ankunftszeit des Lichtes vorhanden ist, tritt hier noch eine periodische hinzu, welche die Periode des γ besitzt, also die Umlaufszeit des Systems. Die periodische Verschiebung allein wollen wir mit Δt bezeichnen und haben:

$$\boxed{\Delta t = \frac{D \cdot k}{c^2} \cdot \gamma .} \qquad (26)$$

Denken wir uns nun die wahre Geschwindigkeitskurve des Systems aufgezeichnet! Dies ist zugleich jene Kurve, die aus den Dopplerbeobachtungen zu ermitteln wäre, wenn die Lorentzsche Annahme der Konstanz der Licht-

geschwindigkeit zu Recht bestünde. Pflanzt sich das Licht aber nach der ballistischen Theorie fort und gilt unsere Annahme A), so werden die Ordinaten jedes einzelnen Punktes der Geschwindigkeitskurve nicht verändert, wohl aber die zugehörigen Abszissen, und zwar um den Betrag Δt. Nach Gleichung (26) ist diese Verschiebung dem γ selbst proportional, also für positive γ positiv, für negative γ negativ.

Zur Erläuterung sei diese Verlagerung für den einfachen Fall einer Kreisbahn des Doppelsternes dargestellt. In diesem Fall ist das γ eine einfache Kosinusfunktion der Zeit t (siehe Abschnitt 7, S. 447), hat also, wenn wir mit K die halbe Amplitude der Radialgeschwindigkeit und mit U die Umlaufszeit bezeichnen, die Form:

$$\gamma = K \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{U} \cdot t\right). \tag{27}$$

Diese wahre Geschwindigkeitskurve ist in Fig. 7 ausgezogen dargestellt. Die durch den

Fig. 7. Veränderung der einer Kreisbahn entsprechenden Geschwindigkeitskurve durch den ballistischen Geschwindigkeitseffekt.

ballistischen Effekt vorgetäuschte Kurve erhalten wir aus ihr so, daß wir alle Punkte der Kurve parallel zur Abszissenachse proportional den Ordinaten γ verschieben. So gelangt man etwa zur gestrichelten Kurve, die also bei einer Kreisbahn beobachtet würde, wenn die ballistische Theorie gälte, während man nach der Lorentzschen Hypothese die Kosinuslinie erhielte. Bevor wir auf die Folgerungen daraus näher eingehen, wollen wir noch die Veränderungen der Geschwindigkeitskurve nach der zweiten Annahme berechnen.

B. Veränderung der Ordinaten („Ballistischer Beschleunigungseffekt" oder „Ballistischer Dopplereffekt")

Wir nehmen nun an, daß jeder einzelne Wellenberg ballistisch emittiert wird. Welches ist dann die vom Beobachter empfangene Frequenz ν', wenn die emittierte Frequenz (die Frequenz im Bezugssystem der Lichtquelle) ν ist?

Da ν die Anzahl der in einer Sekunde ausgesendeten Wellen ist, so beträgt die Anzahl der im infinitesimalen Zeitintervall dt ausgesendeten $\nu \cdot dt$. Nennen wir das Zeitintervall, in welchem diese Anzahl empfangen wird, dt', die empfangene Frequenz ν', dann ist ebenso die empfangene Anzahl $\nu' \cdot dt'$ und diese muß nach Voraussetzung der gesendeten Anzahl gleich sein. D. h. es gilt:

$$\nu \cdot dt = \nu' \cdot dt'. \tag{28}$$

Wir wollen nun das ν' als Funktion des ν kennen, brauchen also eine Beziehung zwischen dt und dt'. Eine solche ergibt sich aber aus dem ballistischen Ansatz. Bezeichnen wir Anfang und Ende der Emissionszeit dt mit t und $t + dt$; analog die zugehörigen Empfangszeiten mit t' und $t' + dt'$; ferner die Radialgeschwindigkeiten des Sternes im Zeitpunkt t mit γ, im Augenblick $t + dt$ mit $\gamma + d\gamma$, so gelten nach dem allgemeinen ballistischen Ansatz die folgenden beiden Gleichungen:

$$t' = t + \frac{D}{c - k \cdot \gamma}. \tag{29}$$

$$t' + dt' = t + dt + \frac{D + \gamma \cdot dt}{c - k(\gamma + d\gamma)}. \tag{30}$$

Durch Subtraktion der Gleichung (29) von (30) erhält man:

$$dt' = dt + \frac{D + \gamma \cdot dt}{c - k(\gamma + d\gamma)} - \frac{D}{c - k\gamma}$$

$$= dt + \frac{\gamma \cdot dt}{c - k(\gamma + d\gamma)} + D\,\frac{k \cdot d\gamma}{[c - k(\gamma + d\gamma)] \cdot [c - k\gamma]},$$

wobei die beiden Glieder mit dem Faktor D zusammengezogen wurden. Bedenkt man nun, daß die Radialgeschwindigkeiten des Sternes γ und $\gamma + d\gamma$ außerordentlich klein gegenüber c sind, um so mehr noch die Produkte $k \cdot \gamma$ und $k(\gamma + d\gamma)$, so erkennt man, daß man diese Größen in den Nennern oben gegen c unbedenklich vernachlässigen kann. So erhält man die Beziehung:

$$dt' = dt + \frac{\gamma}{c}\,dt + \frac{Dk}{c^2} \cdot d\gamma. \tag{31}$$

Die Division durch dt liefert:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{\gamma}{c} + \frac{Dk}{c^2} \cdot \frac{d\gamma}{dt}. \tag{32}$$

Aus Gleichung (28) folgt aber nun mit Gleichung (32):

$$\nu = \nu' \cdot \frac{dt'}{dt} = \nu'\left(1 + \frac{\gamma}{c} + \frac{Dk}{c^2} \cdot \frac{d\gamma}{dt}\right). \tag{33}$$

Diese Formel ist die gesuchte Beziehung zwischen der ausgesendeten Frequenz ν und der

empfangenen ν'. Aus ihr ergibt sich der Dopplereffekt der klassischen Theorie sehr einfach, indem man $k = 0$ setzt, welcher spezielle Fall ja dem Lorentzschen Prinzip konstanter Lichtgeschwindigkeit entspricht. Für $k = 0$ wird aber Gleichung (33):

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{\gamma}{c}\right), \tag{34}$$

welche Formel tatsächlich dem Dopplereffekt der klassischen Optik entspricht. Der Vergleich dieser Formel mit Gleichung (33) zeigt, daß nach unserer zweiten Annahme über die ballistische Lichtemission außer dem klassischen Dopplereffekt noch ein zusätzlicher „sekundärer" oder „ballistischer" Dopplereffekt auftritt.

Nehmen wir nun an, diese ballistische Hypothese (Annahme B) wäre richtig. Dann gilt für die empfangene Frequenz die Formel (33). Verwenden wir aber zur Berechnung der Radialgeschwindigkeit γ die klassische Formel (34), so erhalten wir für γ einen falschen Wert, den wir $\bar{\gamma}$ nennen wollen. Die Ruhfrequenz ν der beobachteten Spektrallinie und die empfangene Frequenz ν' sind aber in beiden Fällen (klassisch oder ballistisch) die gleichen. Daher folgt aus Gleichung (34) und (33):

$$\nu'\left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{c}\right) = \nu'\left(1 + \frac{\gamma}{c} + \frac{D}{c}\frac{k}{c}\frac{d\gamma}{dt}\right)$$

und daraus:

$$\bar{\gamma} = \gamma + k\frac{D}{c}\frac{d\gamma}{dt}. \tag{35}$$

Bezeichnen wir mit „$\Delta\gamma$" jene Radialgeschwindigkeit, welche zur wahren hinzugefügt werden muß, um die von uns beobachtete, verfälschte zu erhalten, so gilt

$$\Delta\gamma = \bar{\gamma} - \gamma$$

und nach Gleichung (35) ist:

$$\boxed{\Delta\gamma = k\frac{D}{c}\cdot\frac{d\gamma}{dt}}. \tag{36}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die vorgetäuschte Ordinatenänderung in der Geschwindigkeitskurve der Beschleunigung des Sternes in der Richtung des Visionsradius $\dot{\gamma}$ proportional ist. Ferner wächst dieser Beschleunigungs-Dopplereffekt mit der Distanz D des Systems.

Die Art der Deformation der Geschwindigkeitskurve durch den sekundären Dopplereffekt soll wieder am Beispiel der Kreisbahn erläutert werden. In Fig. 8 stellt die ausgezogene Linie die unverzerrte, wahre Geschwindigkeitskurve dar, für welche die Gleichung (27) gilt:

$$\gamma = K\cos\left(\frac{2\pi}{U}t\right). \tag{27}$$

Daraus läßt sich das $\dot{\gamma}$ in einfachster Weise bestimmen und damit auch das $\Delta\gamma$, wenn der Faktor $k\cdot\frac{D}{c}$ bekannt ist. Wir nehmen an, daß $\Delta\gamma$ immer klein sei gegenüber K. Dann stellt die punktierte Kurve in Fig. 8 die deformierte Geschwindigkeitskurve dar, wie sie durch den ballistischen Dopplereffekt vorgetäuscht wird. In den Punkten a und c, wo $\dot{\gamma} = 0$ ist,

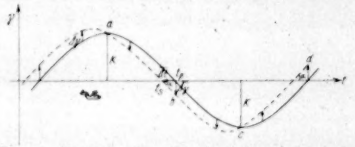

Fig. 8. Veränderung der einer Kreisbahn entsprechenden Geschwindigkeitskurve durch den ballistischen Beschleunigungseffekt.

wird $\Delta\gamma = 0$ sein und die Geschwindigkeit daher nicht verändert. In b und d hat $\dot{\gamma}$ seinen kleinsten bzw. größten Wert, und hier sind die Ordinatenänderungen $\Delta\gamma$ daher auch am größten. Man erkennt ferner aus der Figur leicht, daß die geänderte Kurve wieder eine Kosinuslinie ist, ihre Amplitude (bei kleinem $\Delta\gamma$!) nicht viel geändert ist gegenüber der ungestörten Kurve und der Effekt in der Hauptsache auf eine Parallelverschiebung der Geschwindigkeitskurve in der Richtung der negativen t-Achse hinauskommt. Alles dies läßt sich natürlich rechnerisch durch Addition der beiden Funktionen für γ und $\Delta\gamma$ leicht zeigen; indessen können wir uns mit der anschaulichen Konstatierung des Effektes begnügen und wollen solche einfache Hilfsrechnungen nach Möglichkeit vermeiden.

Zur Fig. 8 ist aber noch eine wichtige Bemerkung zu machen, weil wir in ihr nur die Änderungen der Ordinaten berücksichtigt haben. Bei den Überlegungen unter A. haben wir aber gesehen, daß nach der ballistischen Theorie infolge der veränderlichen Lichtgeschwindigkeit auf jeden Fall eine Verlagerung der Abszissen in der Geschwindigkeitskurve auftreten muß, daher auch in unserem Falle. Wir können indessen zeigen, daß diese Verlagerungen Δt sehr klein sind gegenüber der hier auftretenden scheinbaren Verschiebung der Geschwindigkeitskurve in der t-Richtung, welche wir mit $\overline{\Delta t}$ bezeichnen wollen (s. Fig. 8). Es folgt nämlich aus den Gleichungen (36) und (27) leicht, daß das größte

$\Delta\gamma$, welches wir $(\Delta\gamma)_M$ nennen wollen, gegeben ist durch:

$$(\Delta\gamma)_M = k \cdot \frac{D}{c} K \frac{2\pi}{U} \text{ [1]}.$$

Daraus läßt sich aber das $\overline{\Delta t}$ leicht berechnen, wenn man den tang α (siehe Fig. 8) aus Gleichung (27) bestimmt. Es ist:

$$\operatorname{tang} \alpha = K \frac{2\pi}{U} \text{ [1]},$$

und daraus:

$$\overline{\Delta t} = \frac{(\Delta\gamma)_M}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{kD}{c}. \qquad (37)$$

Für die Abszissenverlagerung infolge des ballistischen Geschwindigkeitseffektes fanden wir hingegen in Gleichung (26):

$$\Delta t = \frac{kD}{c} \cdot \frac{\gamma}{c} \qquad (26)$$

und die Verlagerung hat ihren größten Wert für $\gamma = K$, also den Wert:

$$\Delta t = \frac{kD}{c} \cdot \frac{K}{c}. \qquad (38)$$

Setzt man hier für $\frac{kD}{c}$ aus Gleichung (37) ein, so wird:

$$\Delta t = \overline{\Delta t} \cdot \frac{K}{c}. \qquad (39)$$

Nun ist $\frac{K}{c}$ maximal von der Größenordnung $\frac{1}{1000}$, der Effekt Δt also auch im Maximum kleiner als $\frac{1}{1000}$ von der Verlagerung der Geschwindigkeitskurve durch den ballistischen Dopplereffekt. Deshalb sind wir berechtigt, diesen Effekt hier zu vernachlässigen und die Ordinatenänderung allein zu betrachten.

9. Schlüsse von beobachtbaren Effekten auf den Faktor k des allgemeinen ballistischen Ansatzes

Wir müssen uns nun nach Beobachtungstatsachen umsehen, welche eine Abschätzung des Faktors k gestatten oder doch wenigstens einen Hinweis auf ein von Null verschiedenes k geben können. Wir haben gesehen, daß die wahren Radialgeschwindigkeitskurven, wie sie auch bei Gültigkeit des Lorentzschen Prinzips beobachtet werden müßten, bei ballistischer Fortpflanzung des Lichtes verzerrt werden. Die unverzerrten Kurven gehören zu einer bestimmten Klasse von Funktionen der Zeit mit einer bestimmten Anzahl von Parametern (den Elementen der Bahn). Die verzerrten Kurven werden ebenso einer anderen Klasse von Funktionen entsprechend. Daß dem so ist, kann man leicht einsehen, denn bei den verzerrten Kurven sind Lichtüberlagerungen aus mehreren Punkten der Bahn möglich, wie im Abschnitt 4 gezeigt worden ist, während dies bei den wahren Geschwindigkeitskurven unmöglich ist, weil die wahre Anomalie v mit der Zeit monoton wächst und nach Gleichung (7) zu einem bestimmten Wert von v nur ein einziger Wert von γ gehört, unabhängig von den speziellen Werten der Parameter.

Ein naheliegender Gedanke wäre nun der, aus der bloßen Gestalt der beobachteten γ-Kurve zu entscheiden, ob sie zu der einen oder der anderen Klasse von Funktionen gehört. Dazu wäre aber erforderlich, daß die beobachteten Geschwindigkeitskurven mit außerordentlich großer Genauigkeit bestimmbar wären, was keinesfalls zutrifft. Nehmen wir an, k sei klein, so daß auch die Abszissenverlagerungen Δt klein bleiben relativ zur Umlaufszeit des Systems, so wird die deformierte Kurve außerordentlich nahe bei einer unverzerrten Kurve mit etwas geänderten Parametern, als sie der wahren Kurve entsprechen, verlaufen. D. h. eine mit beschränkter Genauigkeit aus den Beobachtungen ermittelte Geschwindigkeitskurve wird sich ebensogut durch eine Kurve der unverzerrten Klasse, wie durch eine solche der verzerrten darstellen lassen[1]). Zur Entscheidung unserer Frage müssen wir deshalb andere Wege beschreiten. Dabei soll wieder streng zwischen den beiden Annahmen über die Emission des Lichtes auseinandergehalten werden. Zunächst betrachten wir den ballistischen Geschwindigkeitseffekt, später (unter B) den Beschleunigungseffekt.

A. Der ballistische Geschwindigkeitseffekt

10. Die Veränderung der Elemente einer Kreisbahn

Zunächst legen wir uns die Frage vor, in welcher Weise die aus einer verzerrten Geschwindigkeitskurve abgeleiteten Bahnelemente gegenüber den wahren Elementen verändert erscheinen, wenn diese verzerrte Kurve in derselben Weise analysiert wird wie eine wahre Geschwindigkeitskurve, also etwa nach der Methode, die im Abschnitt 7 geschildert wurde. Der Einfachheit wegen wollen wir dabei noch annehmen,

1) Auf das Vorzeichen nehmen wir keine Rücksicht, weil es sich uns nur um die Berechnung des Betrages von $\overline{\Delta t}$ handelt. Über das Vorzeichen sind wir ohnehin schon im klaren.

1) Für kleine Exzentrizitäten ε kann man dies insbesondere auch so zeigen, daß man die beiden Funktionsarten in Potenzreihen nach der Zeit entwickelt und zeigt, daß bei kleinen Δt ein Unterschied in diesen Darstellungen erst bei Gliedern in der zweiten und in höheren Potenzen von ε auftritt.

daß die wahre Bahn kreisförmig sei ($\varepsilon = 0$). Aus Gleichung (7) folgt dann sofort, wenn wir die dort C genannte Konstante hier mit K bezeichnen, daß die Beträge der Extremwerte von γ

$$A = B = K$$

sind. Die Gleichung der unverzerrten Geschwindigkeitskurve ist nach der zitierten Gleichung:

$$\gamma = K \cdot \cos(\omega + v), \tag{40}$$

also eine einfache Kosinuslinie. Die verzerrte Geschwindigkeitskurve haben wir bereits in Fig. 7 gestrichelt dargestellt. Bezeichnen wir die auf die verzerrte Kurve bezüglichen Größen durch gestrichelte Buchstaben, so erkennt man sofort, daß

$$A' = B' = K \tag{41}$$

ist, da die Ordinaten bei der Verlagerung der Abszissen nicht geändert werden. Ebenso unmittelbar sieht man auch, daß die Umlaufszeit U und damit die mittlere Bewegung (mittlere Winkelgeschwindigkeit) n nicht geändert werden. Wohl aber wird die Lage des Periastrons und die Exzentrizität verfälscht. Zur Berechnung der geänderten Werte gebrauchen wir die Formeln (21) und (13):

$$\varepsilon \sin \omega = + \frac{2\,|A \cdot B|}{A + B} \cdot \frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1}, \tag{42}$$

$$\varepsilon \cos \omega = \frac{A - B}{A + B}. \tag{43}$$

Die Bedeutung der f ist aus Fig. 5 ersichtlich. Für die Kreisbahn ist $f_2 = -f_1$ und $A = B$, so daß beide rechte Seiten verschwinden und ε daher $= 0$ sein muß. Für die verzerrte strichlierte Kurve gilt wohl noch $A' = B'$, aber

$$f_1' < f_1, \tag{44}$$

während

$$|f_2'| > |f_2| = f_1. \tag{45}$$

Wir erhalten somit

$$\varepsilon' \sin \omega' = \frac{f_2' + f_1'}{f_2' - f_1'} > 0, \tag{46}$$

$$\varepsilon' \cos \omega' = 0. \tag{47}$$

Die rechte Seite von Gleichung (46) ist > 0, weil Zähler und Nenner negativ sind, wie aus den Ungleichungen (44) und (45) folgt. Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich aber sofort:

$$\omega' = 90^0. \tag{48}$$

Das heißt, eine Kreisbahn wird durch den ballistischen Geschwindigkeitseffekt so verändert, daß eine Exzentrizität vorgetäuscht wird und das Periastron in der Mitte der von uns abgewendeten Hälfte der Bahnellipse zu liegen scheint. Dieses Resultat wird sofort plausibel, wenn wir Fig. 2 betrachten. Die von uns abgewendete Bahnhälfte 2–3–4 schrumpft scheinbar zusammen (Pfeile der Figur!), d. h. daß der Bahnpunkt 3 den Punkten 2 und 4 zeitlich immer näher kommt, je länger das Licht unterwegs ist. Das macht den Eindruck, als ob die Bahnhälfte 2–3–4 rascher durchlaufen würde als 4–1–2, sich also in jener das Periastron befände.

Es läßt sich aber auch das ε' nun leicht berechnen; denn wegen $\omega' = 90^\circ$ folgt aus Gleichung (46):

$$\varepsilon' = \frac{f_2' + f_1'}{f_2' - f_1'} \tag{49}$$

und die f_1' und f_2' können ermittelt werden, weil die Abszissenänderungen nach Gleichung (26) bekannt sind. In der Fig. 9 ist nach der Definition der Flächen f die Fläche $f_1 =$ Fl. $(OABEDO)$ und die Fläche $f_1' =$ Fl. $(ABCA)$, welche strichliert

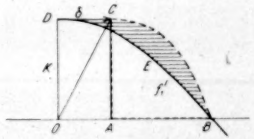

Fig. 9. Berechnung des durch den Geschwindigkeitseffekt veränderten Flächenstückes f_1'.

eingerahmt ist. Nun läßt sich Fl. $(BEDCB)$ leicht berechnen; denn da die Abszissenänderungen den Ordinaten proportional sind, so lassen sich nach dem Cavalierischen Prinzip die horizontalen, durch Schraffierung angedeuteten (infinitesimalen) Flächenstreifen so an die Ordinate $\overline{OD}$ anschieben, daß aus der betrachteten Fläche die flächengleiche Fl. $(ODCO)$ entsteht. Man erhält aber f_1', indem man zu f_1 die Fl. $(BEDCB)$ addiert und das Rechteck Fl. $(OACDO)$ subtrahiert. Also gilt:

$$f_1' = f_1 + \frac{K\delta}{2} - K\delta = f_1 - \tfrac{1}{2} K\delta. \tag{50}$$

Eine ganz analoge Betrachtung liefert ferner für die negative Fläche f_2':

$$f_2' = f_2 - \tfrac{1}{2} K\delta. \tag{51}$$

Wegen der Symmetrie der Kosinuslinie gilt ferner:

$$f_2 = -f_1. \tag{52}$$

f_1 ist als Fläche der Kosinuslinie $\gamma = K \cos\left(\frac{2\pi}{U} \cdot t\right)$ zwischen $t = 0$ und $t = \frac{U}{4}$ in einfachster Weise zu berechnen. Man findet:

$$f_1 = K \cdot \frac{U}{2\pi}. \tag{53}$$

Die maximale Abszissenverlagerung δ endlich ergibt sich aus Gleichung (26) für die maximale γ-Ordinate, also $\gamma = K$ zu:

$$\delta = \frac{kD}{c^2} \cdot K \,. \tag{54}$$

Setzt man aus den Gleichungen (50) bis (53) in Gleichung (49) ein, so wird:

$$\varepsilon' = \frac{f_1 + f_2 - K\delta}{f_2 - f_1} = \frac{-K\delta}{-2f_1} = \frac{K\delta\pi}{KU} = \frac{2\pi}{U} \cdot \frac{\delta}{2} \,.$$

Bezeichnen wir noch die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{U}$ mit w, um in Übereinstimmung mit der in der Literatur üblichen Formelschreibung zu bleiben, setzen für δ aus Gleichung (54) ein und fügen das in Gleichung (48) gewonnene Resultat bei, so ist

$$\boxed{\varepsilon' = w k \frac{DK}{2c^2}} \,, \tag{55}$$

$$\boxed{\omega' = 90^\circ} \,. \tag{56}$$

11. Statistische Kriterien

Die eben entwickelten Formeln gelten unseren Voraussetzungen entsprechend nur für Kreisbahnen ($\varepsilon = 0$, $\omega =$ unbestimmt). Bei elliptischen Bahnen besitzt das ω einen bestimmten Wert und wir können annehmen, daß bei einer größeren Anzahl willkürlich herausgegriffener spektroskopischer Doppelsternsysteme die ω nach den Gesetzen des Zufalls auf die vier Quadranten verteilt sind. Infolge der ballistischen Lichtausbreitung werden die ω aber in die ω' verfälscht und bei diesen wird der oben für die Kreisbahn berechnete Effekt offenbar bewirken, daß die Verteilung von der gleichmäßigen abweichen wird und eine Häufung der beobachteten ω'-Werte um $\omega' = 90^\circ$ eintreten muß. Denn die scheinbare zeitliche Schrumpfung der von uns abgewendeten Bahnhälfte und die Dehnung der uns zugekehrten wird natürlich auch bei elliptischen Bahnen eine notwendige Folge der ballistischen Lichtausbreitung sein. Mit der ungleichen Verteilung der Periastren ist aber ein erstes statistisches Kriterium für die Richtigkeit der ballistischen Theorie gewonnen.

Aus der Formel für ε' sehen wir ferner, daß bei Kreisbahnen eine Exzentrizität vorgetäuscht wird, deren Wert cet. par. mit der Distanz D wächst. Erweitern wir diesen Schluß (in allerdings nicht korrekter Weise!) auf die Mittelwerte der Exzentrizitäten beliebiger Bahnen, so müssen wir erwarten, daß diese Mittelwerte von ε' mit der Distanz wachsen, wofern sich das Licht ballistisch ausbreitet. Damit haben wir ein zweites statistisches Kriterium für die ballistische Theorie gewonnen.

12. Prüfung der statistischen Kriterien an der Erfahrung

Die beiden ersten Arbeiten, welche den verallgemeinerten ballistischen Ansatz betrachten, untersuchen die Statistik der spektroskopischen Doppelsterne. Freundlich weist auf eine statistische Zusammenstellung von Miller-Barr hin, nach welcher unter 28 Bahnen spektroskopischer Doppelsterne 23 das Periastron zwischen 0° und 180° haben, während es für nur 5 Systeme zwischen 180° und 360° liegt, also auf dem uns zugekehrten Bahnteil[1]).

Diese Tatsache widerspricht den Erwartungen vom Standpunkt der klassischen Theorie und ist nach Freundlich möglicherweise ein Hinweis auf einen ballistischen Effekt. Freilich ist es von vornherein nicht auszuschließen, daß die Bahnen wirklich eine solche radialsymmetrische Verteilung aufweisen, bei der etwa die Richtung zum Milchstraßenzentrum in dynamischer Hinsicht ausgezeichnet wäre; eine solche Verteilung der wahren Periastren bleibt aber doch ziemlich unwahrscheinlich.

Gegen die Statistik von Miller-Barr sind deshalb schon vor der Diskussion über die ballistische Lichttheorie von rein astronomischem Standpunkt Bedenken erhoben worden. Ludendorff weist (1910) darauf hin, daß 9 von den betrachteten 28 „Doppelsternen" Veränderliche vom Typus δ-Cephei und ξ-Geminorum sind. Wir wissen heute, daß solche Sterne sicher nicht spektroskopische Doppelsterne sind, wie man früher wegen der periodischen Verschiebung ihrer Spektrallinien glaubte, sondern höchstwahrscheinlich pulsierende Sterne, bei welchen infolge der Schwingungen des ganzen Körpers auch die Radialgeschwindigkeit variabel ist. Schließt man diese Veränderlichen aus, so wird das uns interessierende Verhältnis 16:3, also noch ungleicher.

Ludendorff untersucht weiterhin ein größeres Material und findet unter Ausschluß der Cepheiden für das Verhältnis der Anzahl jener Systeme, deren ω zwischen 0 und 180° liegt zur Anzahl jener, die ein ω zwischen 180 und 360° haben, die Zahl 23 : 14. Dieses Verhältnis ist schon bedeutend kleiner als oben. Dabei zeigt es sich, daß besonders die Bahnen mit großer Exzentrizität ihr Periastron von uns abgewendet

[1]) Die Zahlen sind von Ludendorff wegen eines Druckfehlers korrigiert.

haben. Beschränkt man sich auf Bahnen mit Exzentrizitäten kleiner als 0,5, so wird das betrachtete Verhältnis 17 : 14, oder in Verteilung auf die vier Quadranten 8 : 9 : 8 : 6, d. h. so gleichmäßig, als man es bei der geringen Anzahl des verfügbaren Materials überhaupt erwarten darf. Die übrigen 6 Paare mit $\varepsilon > 0{,}5$ haben alle ihr ω zwischen 20° und 113°. Von dieser Gruppe sagt Ludendorff mit Recht: „Will man nun nicht an ein merkwürdiges Spiel des Zufalls glauben, so läßt sich die Annahme nicht von der Hand weisen, daß bei den in den Spektren dieser Sterne beobachteten Linienverschiebungen noch andere Ursachen mitwirken als eine einfache Bahnbewegung. Diese Ursachen brauchen natürlich nicht bei allen der genannten Sterne wirksam zu sein. Andererseits wird man die Möglichkeit nicht ableugnen können, daß sie auch bei einem oder dem andern unter den Sternen mit geringer Exzentrizität in Erscheinung treten."

Immerhin bleibt, wie wir eben sahen, eine gewisse Anomalie in der Verteilung der Periastren übrig und man könnte sie in ballistischem Sinne deuten, wenn nicht, wie Guthnick gezeigt hat, andere statistische Daten einer solchen Deutung widersprechen würden. Guthnick unterteilt das Beobachtungsmaterial nach Umlaufszeiten und Eigenbewegungen. Systeme kurzer Umlaufszeiten haben im Durchschnitt auch größere Radialgeschwindigkeiten und deshalb müßte man bei ihnen einen größeren Effekt in der ungleichen Verteilung der ω' erwarten, als bei Systemen mit langer Umlaufszeit. Die, allerdings kleine, Statistik zeigt das Gegenteil.

Aber auch das zweite statistische Kriterium spricht gegen die ballistische Theorie. Nach ihm sollte die Exzentrizität mit wachsender Distanz zunehmen. Nun kennen wir die Distanz D bei den meisten Systemen nicht, wohl aber die Eigenbewegung, welche statistisch als Maß für das D verwendet werden kann. Denn unter der Annahme durchschnittlich gleicher Geschwindigkeiten im ganzen Sternsystem müssen größeren Entfernungen kleinere Eigenbewegungen zugehören und umgekehrt. Man müßte also bei Richtigkeit der ballistischen Hypothese bei Systemen mit kleiner Eigenbewegung im Durchschnitt größere Exzentrizitäten vorfinden als bei großen Eigenbewegungen, während die Beobachtungen gerade das Gegenteil zeigen.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß aus der Statistik der spektroskopischen Doppelsterne kein einwandfreier Hinweis auf die Gültigkeit der verallgemeinerten ballistischen Hypothese gewonnen wird und sich auch der Wert des k von hier aus nicht abschätzen läßt.

13. De Sitters Abschätzung für den Faktor k

De Sitter hat eine Abschätzung für den Faktor k angegeben, die auf der Gleichung (55) beruht:

$$\varepsilon' = \varepsilon k \frac{DK}{2c^2} . \qquad (55)$$

Hier ist das ε' die scheinbar durch den ballistischen Effekt veränderte Exzentrizität, wobei die wahre Exzentrizität $\varepsilon = 0$ angenommen worden war. Nun kann die ursprüngliche Exzentrizität offenbar nie kleiner sein als $\varepsilon = 0$. Findet man unter den beobachteten spektroskopischen Systemen ein solches mit sehr kleinem ε', so kann man unter der Annahme, daß die wahre Bahn eine Kreisbahn, also dieses ε' zur Gänze vorgetäuscht ist, die Formel (55) dazu verwenden, um das k zu berechnen, vorausgesetzt, daß die Distanz D des Systems auch bekannt ist.

Als geeignetes Beispiel führt De Sitter das spektroskopische Doppelsternsystem β Aurigae an. Die maßgebenden Daten sind hier die folgenden:

$$\pi = 0 \cdot 014''$$
$$\varepsilon' = 0 \cdot 005$$
$$K = 110 \text{ km/sec}$$
$$U = 3 \cdot 96^d .$$

Dabei ist hier an Stelle der Distanz D die Parallaxe π angegeben, deren reziproker Wert in Bogensekunden ja unmittelbar die Distanz in Parsec angibt. Die Werte für K und U sind genügend genau. π und ε' sind natürlich nicht so sicher angebbar. De Sitter nimmt für diese beiden Größen die ungünstigsten Werte an (welche k größer machen), die gerade noch mit den Beobachtungen verträglich sind, nämlich:

$$\pi \leq 0 \cdot 05$$
$$\varepsilon' \leq 0 \cdot 015 .$$

Mit diesen beiden Werten und den obigen für K und U findet er dann aus Gleichung (55) sofort

$$k \leq 0 \cdot 002 .$$

D. h. also, daß die Geschwindigkeit der Lichtquelle höchstens mit dem 500sten Teil ihres Betrages in die Lichtgeschwindigkeit eingeht. Nach De Sitter müßte es möglich sein, andere Systeme zu finden, die es gestatten, diesen Wert noch weiter herabzudrücken.

Diese Schlüsse von De Sitter und damit auch ihr oben angeführtes Ergebnis, das vielfach in physikalischen Lehrbüchern zitiert wird, sind indessen falsch. Es scheint, daß in der Literatur

der Irrtum nirgends bemerkt wurde. Er entspringt daraus, daß De Sitter von einer Formel ausgeht, die nur für einen ganz speziellen Fall, nämlich für die Kreisbahn, gilt. Es ist unrichtig, anzunehmen, daß nicht auch die Exzentrizität Null vorgetäuscht sein kann. Um das einzusehen, betrachten wir die Fig. 7. Die ausgezogene Geschwindigkeitskurve entspricht der Kreisbahn; durch den ballistischen Geschwindigkeitseffekt wird sie in die strichlierte Kurve verändert. Wir können aber ohne weiteres annehmen, daß die unverfälschte Geschwindigkeitskurve eine solche ist, daß durch die Abszissenänderungen des ballistischen Effektes eine Kosinuslinie entsteht, die uns also die Exzentrizität Null vortäuscht. Dieser Fall ist in Fig. 10 dargestellt, in der die ausgezogene Kurve wieder die wahre γ-Kurve

Fig. 10. Durch den ballistischen Geschwindigkeitseffekt wird die einer bestimmten elliptischen Bahn entsprechende Geschwindigkeitskurve so verändert, daß eine Kreisbahn vorgetäuscht wird.

ist, die strichlierte aber die durch den Geschwindigkeitseffekt verfälschte. Durch Überlegungen, welche jenen im Abschnitt 10 mit den Schlußgleichungen (55) und (56) völlig analog sind, kann man auch hier leicht einsehen, daß die ausgezogene wahre Kurve in Fig. 10 einer Bahn mit $\varepsilon = 0$ und $\omega = 270°$ entspricht. Das Periastron ist also hier uns zugekehrt und damit auch jener Teil der Bahnellipse, der dem Flächensatz entsprechend rascher durchlaufen wird als die von uns abgewendete Bahnhälfte um das Apoastron. Durch den ballistischen Effekt muß aber wie, schon früher ausgeführt wurde, dieser letztere Bahnteil zeitlich zusammenschrumpfen, der uns zugekehrte sich dehnen, so daß dadurch ihre Ungleichheit ausgeglichen und damit die Kreisbahn vorgetäuscht werden kann. Auf diese Weise wird uns der Sachverhalt somit auch anschaulich verständlich.

Der Irrtum De Sitters entspringt also aus der unvollständigen Behandlung der sich hier ergebenden Frage. Wir hätten eigentlich fragen müssen: Wie verändern sich die Elemente ε und ω für eine beliebige Bahn infolge des ballistischen Geschwindigkeitseffektes und von welchen Parametern hängen diese Änderungen noch ab? Statt dessen haben wir aber nur den einfachen Fall der Kreisbahn betrachtet, ihre scheinbare Veränderung untersucht und durch plausible Verallgemeinerungen eine Statistik an diesen Spezialfall statt an den allgemeinen angeschlossen. Deshalb sind auch die Überlegungen des Abschnittes 11 nicht ganz korrekt, worauf schon dort hingewiesen wurde. Indessen scheint es durchaus nicht der Mühe wert zu sein, den allgemeinen Fall und daran anschließend eine strengere Statistik zu entwickeln, weil erstens das Beobachtungsmaterial, auch heute noch, zu gering ist und weil zweitens innere, in der Entstehung der Binärsysteme begründete Gesetzmäßigkeiten, die wir nicht kennen, sich einem eventuellen ballistischen Effekt überlagern und seinen einwandfreien Nachweis unmöglich machen würden.

Im zweiten Teil wollen wir auf den ballistischen Beschleunigungseffekt (Annahme B) eingehen. Zwei besonders interessante Arbeiten von Zurhellen und von Thirring beschäftigen sich mit diesem Effekt und untersuchen, ob sich die ballistische Theorie durch ihn an Hand der Erfahrung prüfen läßt.

Graz, Universitäts-Sternwarte, im November 1938.

(Eingegangen 18. März 1939)

Besprechungen

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten.

Louis de Broglie, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. 8° (25—16). 223 S. Mit 19 Fig. Paris 1939. Gauthier-Villars. (Collection de Physique Mathématique Bd. V). Fr. 100.— brosch.

Die vorliegende Darstellung der Wellenmechanik unterscheidet sich von den übrigen Büchern über diesen Gegenstand im wesentlichen dadurch, daß der Verfasser nicht, wie sonst, mit der Wellenmechanik eines einzelnen Teilchens beginnt und dann erst zum Mehrkörperproblem übergeht, sondern letzteres von Anfang an zum Gegenstand seiner Betrachtungen macht. Doch werden die Grundlagen und Methoden der Wellenmechanik (einschließlich Störungsrechnung, Elektronenspin und Statistik, ausschließlich relativistische Effekte) in üblicher Weise entwickelt. Durch die Persönlichkeit des Verfassers erhält das Werk eine besondere Note. F. Sauter

Nachrichten

Dozenturen: An der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Johannes Fischer für technische Elektrotechnik.

Ernannt: Der nichtbeamtete a. o. Professor an der Technischen Hochschule Breslau Dr.-Ing. Paul Böning zum ord. Professor für theoretische Elektrotechnik und Elektromaschinenbau an derselben Hochschule.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien Dr. Adalbert Prey.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h.c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — D.A. 1330, II. Vj. 1939. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.